Polarized Partition on Successors of Singular Cardinals

津久浦 健太

筑波大学 数理物質科学研究科

2019 年 12 月 7 日
数学基礎論若手の会 2019

Remark

ZFC で議論する.

Remark

ZFC で議論する.

Remark

ZFC の無矛盾性は仮定する.

Definition

1. 自分より小さい順序数との間に全単射を持たない順序数を**基数**という. α 番目の無限基数を $\aleph_\alpha$ と書く.
2. 基数 κ に対し, それより大きい最小の基数を κ^+ と書き, (κ の) **後続基数**という. 後続基数でない基数を**極限基数**という
3. 順序数 α に対し, $\mathrm{cf}(\alpha) = min\{|x| \mid x \subseteq \alpha \text{ is unbounded in } \alpha\}$ を α の**共終数**という.
4. $cf(\kappa) = \kappa$ なる基数 κ を**正則基数**という.
5. 正則でない無限基数を**特異基数**という

Example

1. $\aleph_0$ や κ^+ は正則基数である.
2. $\aleph_\omega$ は特異基数である. $\{\aleph_n \mid n < \omega\}$ は $\aleph_\omega$ で非有界であるから $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0$ である.

Definition

集合 X, 基数 κ に対し, $[X]^\kappa = \{Y \subseteq X \mid |Y| = \kappa\}$.

Theorem (Ramsey, 1930)

任意の $c : [\omega]^2 \to 2$ に対し, ある $H \in [\omega]^\omega$ が存在して, $|c''[H]^2| \leq 1$.

Definition

集合 X, 基数 κ に対し, $[X]^\kappa = \{Y \subseteq X \mid |Y| = \kappa\}$.

Theorem (Ramsey, 1930)

任意の $c : [\omega]^2 \to 2$ に対し, ある $H \in [\omega]^\omega$ が存在して, $|c''[H]^2| \leq 1$.

集合論ではこの性質を一般化したものが研究されている:

Definition

$\kappa \to (\lambda)^n_\theta$ とは, 次の主張をいう:
任意の $c : [\kappa]^n \to \theta$ に対し, ある $H \in [\kappa]^\lambda$ が存在して, $|c''[H]^n| \leq 1$.

Example

1. *(Ramsey)* $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$.
2. *(Erdös–Rado)* 任意の κ に対し $\kappa \not\to (\aleph_0)^\omega$
3. *(Erdös–Rado)* $(2^{\aleph_0})^+ \to (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$.
4. *(Sierpínski)* $2^{\aleph_0} \not\to (\aleph_1)^2_2$.
5. *(Gödel)*$2^{\aleph_0} \not\to (3)^2_{\aleph_0}$

Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

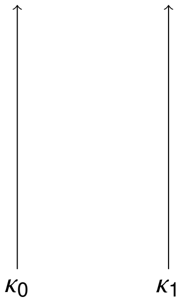
$$\begin{pmatrix}\kappa_0\\ \kappa_1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{pmatrix}_\theta$$

とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.

Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\binom{\kappa_0}{\kappa_1} \to \binom{\lambda_0}{\lambda_1}_{\theta}$$

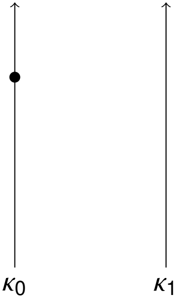
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c'' H_0 \times H_1| \leq 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\binom{\kappa_0}{\kappa_1} \to \binom{\lambda_0}{\lambda_1}_{\theta}$$

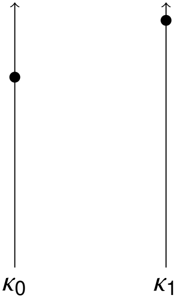
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\binom{\kappa_0}{\kappa_1} \to \binom{\lambda_0}{\lambda_1}_\theta$$

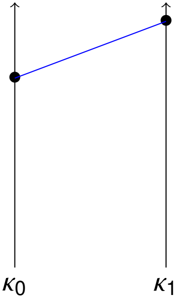
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\binom{\kappa_0}{\kappa_1} \to \binom{\lambda_0}{\lambda_1}_\theta$$

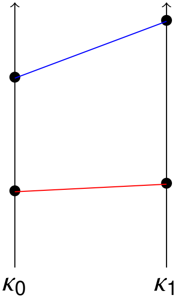
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\begin{pmatrix}\kappa_0\\ \kappa_1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{pmatrix}_{\theta}$$

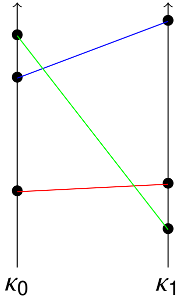
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\binom{\kappa_0}{\kappa_1} \to \binom{\lambda_0}{\lambda_1}_\theta$$

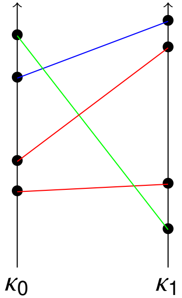
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\begin{pmatrix}\kappa_0\\ \kappa_1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{pmatrix}_{\theta}$$

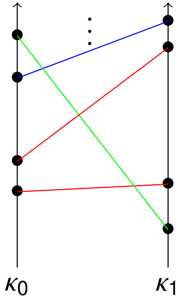
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\binom{\kappa_0}{\kappa_1} \to \binom{\lambda_0}{\lambda_1}_\theta$$

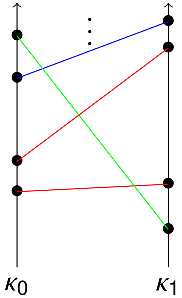
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \le 1$.



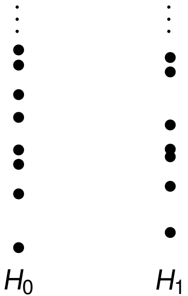
Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\begin{pmatrix}\kappa_0\\ \kappa_1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{pmatrix}_\theta$$

とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



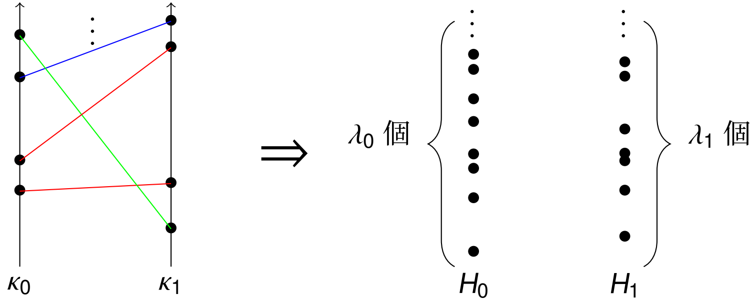
$\Longrightarrow$



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\binom{\kappa_0}{\kappa_1} \to \binom{\lambda_0}{\lambda_1}_\theta$$

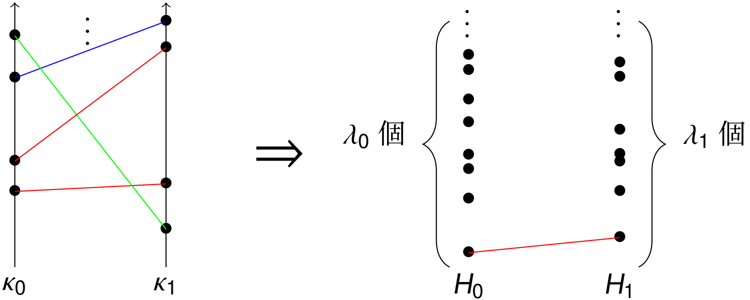
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \le 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\begin{pmatrix}\kappa_0\\ \kappa_1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{pmatrix}_\theta$$

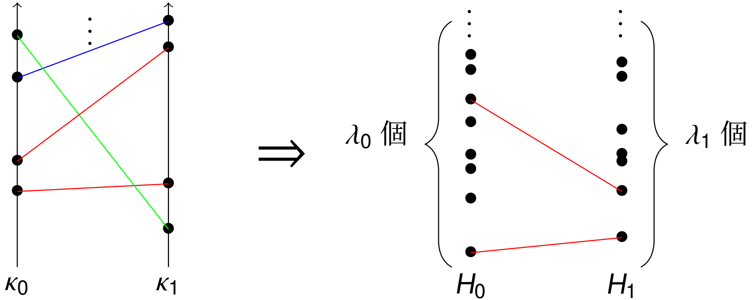
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\begin{pmatrix}\kappa_0\\ \kappa_1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{pmatrix}_\theta$$

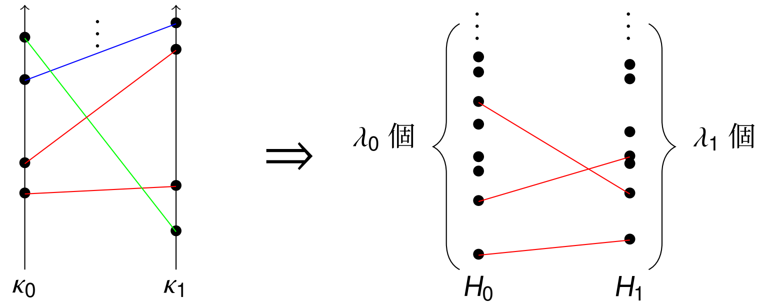
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \le 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}_\theta$$

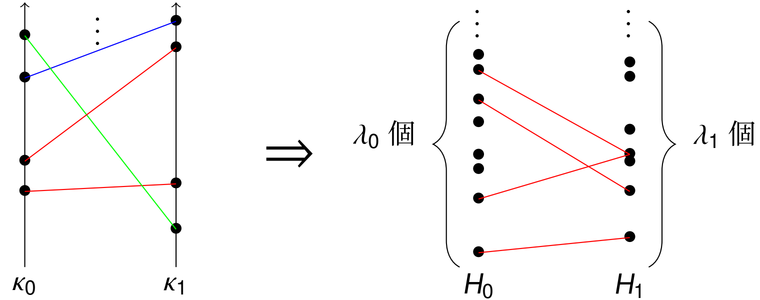
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\begin{pmatrix}\kappa_0\\ \kappa_1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{pmatrix}_\theta$$

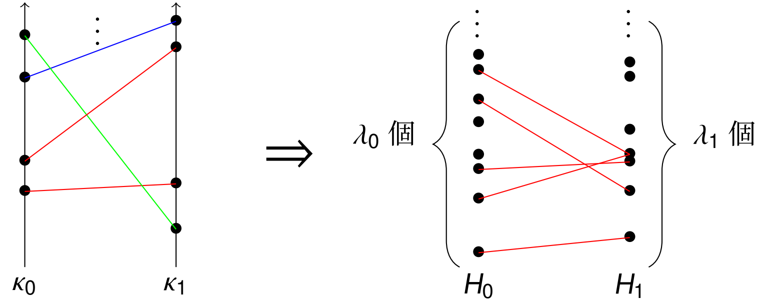
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\binom{\kappa_0}{\kappa_1} \to \binom{\lambda_0}{\lambda_1}_{\theta}$$

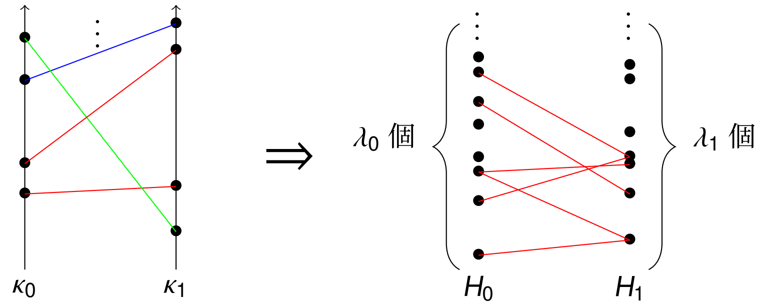
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \le 1$.



Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\begin{pmatrix}\kappa_0\\ \kappa_1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{pmatrix}_\theta$$

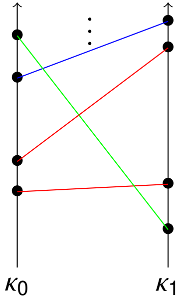
とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し, ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



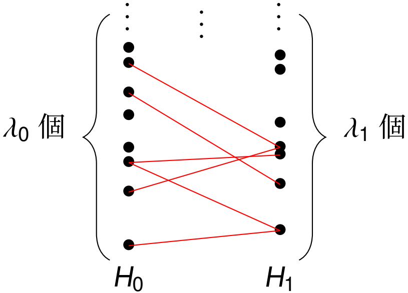
Definition (Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$$\begin{pmatrix}\kappa_0\\ \kappa_1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\end{pmatrix}_\theta$$

とは次の主張をいう:
任意の $c : \kappa_0 \times \kappa_1 \to \theta$ に対し，ある $H_0 \in [\kappa_0]^{\lambda_0}$, $H_1 \in [\kappa_1]^{\lambda_1}$ が存在して $|c''H_0 \times H_1| \leq 1$.



$\Longrightarrow$



Lemma

κ が正則基数で $\kappa > 2^\lambda$ であるとき, $\binom{\kappa}{\lambda} \to \binom{\kappa}{\lambda}_2$.

Proof.

$c : \kappa \times \lambda \to 2$ を任意に取る. 各 $\alpha < \kappa$ に対し $c(\alpha, -) : \lambda \to 2$ であるが, このような関数の数は高々2^λ. よってある $d : \lambda \to 2$ と $H \in [\kappa]^\kappa$ が存在して,

$$\forall \alpha \in H_0 (c(\alpha, -) = d(-)).$$

また, ある $H_1 \in [\lambda]^\lambda$ と $i < 2$ が存在して,

$$\forall \xi \in H_1 (d(\xi) = i).$$

特に $c'' H_0 \times H_1 = \{i\}$ である. □

Lemma

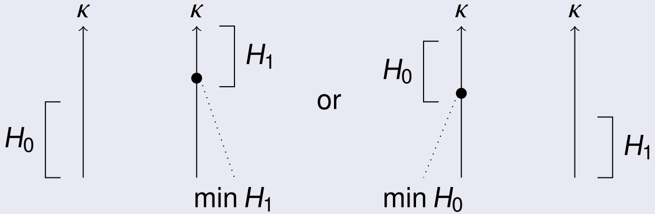
任意の κ に対し, $\binom{\kappa}{\kappa} \not\to \binom{\kappa}{\kappa}_2$.

Proof.

$c : \kappa \times \kappa \to 2$ を次のように定義する:

$$c(\xi, \zeta) = \begin{cases} 0 & \xi > \zeta \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases}$$

均質集合 H_0, H_1 を取るとある $i < 2$ に対し $\min H_i \geq \sup H_{1-i}$,



Lemma

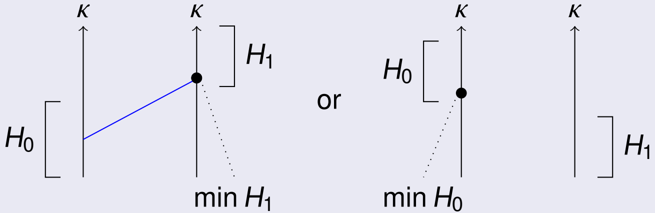
任意の κ に対し, $\binom{\kappa}{\kappa} \not\to \binom{\kappa}{\kappa}_2$.

Proof.

$c : \kappa \times \kappa \to 2$ を次のように定義する:

$$c(\xi, \zeta) = \begin{cases} 0 & \xi > \zeta \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases}$$

均質集合 H_0, H_1 を取るとある $i < 2$ に対し $\min H_i \geq \sup H_{1-i}$,



Lemma

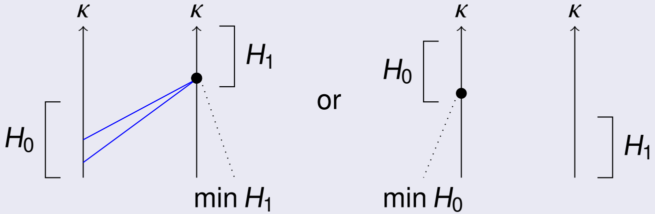
任意の κ に対し, $\binom{\kappa}{\kappa} \not\to \binom{\kappa}{\kappa}_2$.

Proof.

$c : \kappa \times \kappa \to 2$ を次のように定義する:

$$c(\xi, \zeta) = \begin{cases} 0 & \xi > \zeta \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases}$$

均質集合 H_0, H_1 を取るとある $i < 2$ に対し $\min H_i \geq \sup H_{1-i}$,



Lemma

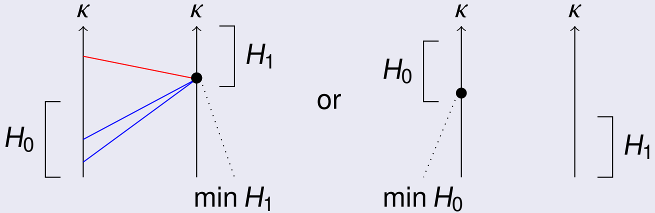
任意の κ に対し, $\binom{\kappa}{\kappa} \not\to \binom{\kappa}{\kappa}_2$.

Proof.

$c : \kappa \times \kappa \to 2$ を次のように定義する:

$$c(\xi, \zeta) = \begin{cases} 0 & \xi > \zeta \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases}$$

均質集合 H_0, H_1 を取るとある $i < 2$ に対し $\min H_i \geq \sup H_{1-i}$,



Lemma

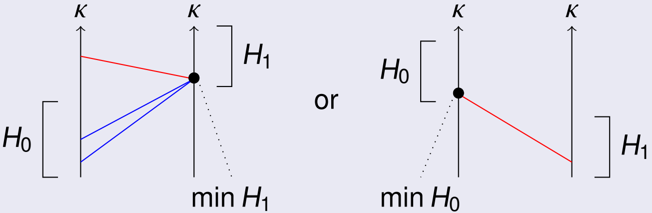
任意の κ に対し, $\binom{\kappa}{\kappa} \not\to \binom{\kappa}{\kappa}_2$.

Proof.

$c : \kappa \times \kappa \to 2$ を次のように定義する:

$$c(\xi, \zeta) = \begin{cases} 0 & \xi > \zeta \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases}$$

均質集合 H_0, H_1 を取るとある $i < 2$ に対し $\min H_i \geq \sup H_{1-i}$,



Lemma

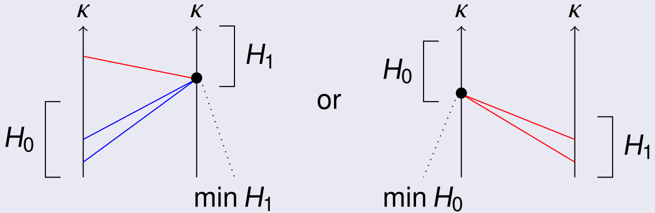
任意の κ に対し, $\binom{\kappa}{\kappa} \not\to \binom{\kappa}{\kappa}_2$.

Proof.

$c : \kappa \times \kappa \to 2$ を次のように定義する:

$$c(\xi, \zeta) = \begin{cases} 0 & \xi > \zeta \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases}$$

均質集合 H_0, H_1 を取るとある $i < 2$ に対し $\min H_i \geq \sup H_{1-i}$,



Lemma

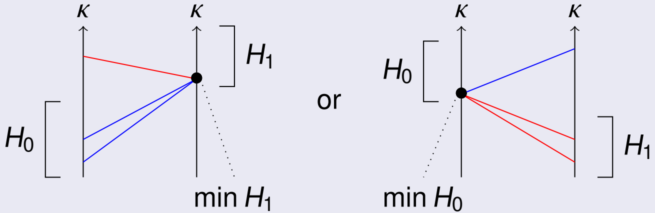
任意の κ に対し, $\binom{\kappa}{\kappa} \not\to \binom{\kappa}{\kappa}_2$.

Proof.

$c : \kappa \times \kappa \to 2$ を次のように定義する:

$$c(\xi, \zeta) = \begin{cases} 0 & \xi > \zeta \\ 1 & \text{o.w.} \end{cases}$$

均質集合 H_0, H_1 を取るとある $i < 2$ に対し $\min H_i \geq \sup H_{1-i}$,



$\rightsquigarrow$ (θ, κ) 上の Polarized Partition は $\kappa^+ \le \theta \le 2^\kappa$ なる場合に興味がある.
$2^\kappa = \kappa^+$ のとき, (κ^+, κ) 上の Polarized Partition はどうか?

Theorem (Sierpiński for $\kappa = \omega$,1933; Erdös–Hajnal–Rado, 1965)

$2^\kappa = \kappa^+$ のとき, $\binom{\kappa^+}{\kappa} \not\to \binom{\kappa^+}{\kappa}_2$

Question

$2^\kappa = \kappa^+$ のとき, (κ^+, κ) 上の *Polarized Partition* はどれくらい破れているか?

Answer

$2^\kappa = \kappa^+$ という仮定は (κ^+, κ) 上の *Polarized Partition* に殆ど影響を与えない.

Lemma

κ が正則基数で $\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\kappa}{\kappa}_{<\mathrm{cf}(\kappa)}$ が成り立っているとき, ある強制概念 $\mathbb{P}$ が存在して,

$$\mathbb{P} \Vdash \binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\kappa}{\kappa}_{<\mathrm{cf}(\kappa)} \wedge 2^\kappa = \kappa^+.$$

$\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\kappa}{\kappa}_{<\mathrm{cf}(\kappa)}$ を Almost Strong Polarized Partition と呼ぶ. これは $2^\kappa = \kappa^+$ と両立しうる極大な形である.

Theorem

- *(Erdös–Hajnal–Rado, 1965)*κ が $\mathrm{cf}(\kappa) = \omega$ なる特異基数なら,
$$\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\kappa}{\kappa}_{<\mathrm{cf}(\kappa)}.$$
- *(Shelah, 1998)* κ が可測基数の極限になっているような特異基数なら,
$$\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\kappa}{\kappa}_{<\mathrm{cf}(\kappa)}.$$
- *(Baumgartner–Hajnal, 2001)*κ が弱コンパクトなら,
$$\binom{\kappa^+}{\kappa} \to \binom{\kappa}{\kappa}_{<\mathrm{cf}(\kappa)}$$

$\rightsquigarrow$ κ が極限基数なら殆ど ZFC から証明可能.

Theorem (Jensen, 1970's)

$$L \models \forall\kappa \begin{pmatrix}\kappa^{++}\\ \kappa^{+}\end{pmatrix} \not\to \begin{pmatrix}2\\ \kappa^{+}\end{pmatrix}_{\kappa}.$$

$\rightsquigarrow$ $\lambda > 1$ に対し, $\begin{pmatrix}\kappa^{++}\\ \kappa^{+}\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\lambda\\ \kappa^{+}\end{pmatrix}_{\kappa}$ は ZFC から証明出来ない.

Theorem (Jensen, 1970's)

$$L \models \forall\kappa \binom{\kappa^{++}}{\kappa^{+}} \not\to \binom{2}{\kappa^{+}}_{\kappa}.$$

$\rightsquigarrow$ $\lambda > 1$ に対し, $\binom{\kappa^{++}}{\kappa^{+}} \to \binom{\lambda}{\kappa^{+}}_{\kappa}$ は ZFC から証明出来ない.

Theorem (Laver, 1982)

HUGE 基数が存在するとき, $\binom{\aleph_2}{\aleph_1} \to \binom{\aleph_1}{\aleph_1}_{\aleph_0}$ は *ZFC* と無矛盾.

$\rightsquigarrow$ 正則基数の後者で Almost Strong Polarized Partition は成立しうる.

Theorem (Jensen, 1970's)

$L \models \forall\kappa \binom{\kappa^{++}}{\kappa^{+}} \not\to \binom{2}{\kappa^{+}}_{\kappa}$.

$\rightsquigarrow \lambda > 1$ に対し, $\binom{\kappa^{++}}{\kappa^{+}} \to \binom{\lambda}{\kappa^{+}}_{\kappa}$ は ZFC から証明出来ない.

Theorem (Laver, 1982)

HUGE 基数が存在するとき, $\binom{\aleph_2}{\aleph_1} \to \binom{\aleph_1}{\aleph_1}_{\aleph_0}$ は *ZFC* と無矛盾.

$\rightsquigarrow$ 正則基数の後者で Almost Strong Polarized Partition は成立しうる.

Question

特異基数の後者ではどうか?

即ち, $\lambda > 1$ と特異基数 κ に対し, $\binom{\kappa^{++}}{\kappa^{+}} \to \binom{\lambda}{\kappa^{+}}_{\kappa}$ は ZFC と無矛盾か?

Theorem (T.)

HUGE 基数未満に超コンパクト基数が存在するとき,
$\forall n < \omega \begin{pmatrix} \aleph_{\omega+2} \\ \aleph_{\omega+1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \aleph_n \\ \aleph_{\omega+1} \end{pmatrix}_{\aleph_\omega}$ は *ZFC* と無矛盾.

Theorem (T.)

HUGE 基数未満に超コンパクト基数が存在するとき,
$\forall n < \omega \binom{\aleph_{\omega+2}}{\aleph_{\omega+1}} \to \binom{\aleph_n}{\aleph_{\omega+1}}_{\aleph_\omega}$ は *ZFC* と無矛盾.

Question

- $\binom{\aleph_{\omega+2}}{\aleph_{\omega+1}} \to \binom{\aleph_\omega}{\aleph_{\omega+1}}_{\aleph_\omega}$ は *ZFC* と無矛盾か?
- $\binom{\aleph_{\omega+2}}{\aleph_{\omega+1}} \to \binom{\aleph_{\omega+1}}{\aleph_{\omega+1}}_{\aleph_\omega}$ は *ZFC* と無矛盾か?

後続基数上で Almost Strong Polarized Partition(あるいはその部分的な Polarized Partition) を成立させるためには巨大基数的性質が必要.

Definition (?)

巨大基数とは, 存在の整合性を *ZFC* の無矛盾性から証明出来ない基数をいう.

Example

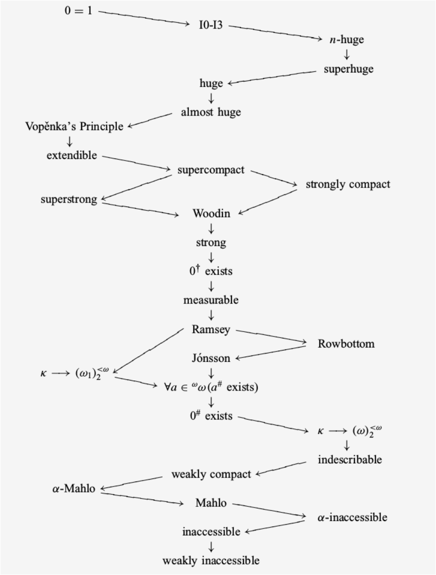
κ が到達不能基数とは, 正則でかつ $\forall\lambda < \kappa(2^\lambda < \kappa)$ であるちょうどそのときをいう.

κ が到達不能基数であるとき, $V_\kappa \models$ ZFC が証明出来る. よって到達不能基数が存在するかどうかは ZFC から証明出来ず, さらに,

$$\mathrm{ZFC}+ \text{到達不能基数が存在する} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$$

より

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC}) \not\to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \text{到達不能基数が存在する}).$$



1. The Higher Infinite の巨大基数の階層図.
2. 右図の $A \to B$ とは, $ZFC \vdash Con(ZFC + A) \to Con(ZFC + B)$ を意味する.

大きい巨大基数は初等埋め込みを用いて定義される.

Definition (可測基数)

κ が可測基数であるとは, V の内部モデル M への V で定義可能な非自明な初等埋め込み $j : V \to M$ が存在してその臨界点になることをいう.

ここに,

1. M が V の内部モデルとは $ON \subseteq M \subseteq V$ で推移的 $(x \in y \in M \to x \in M)$ でかつ $\langle M, \in \rangle \models ZFC$ となる丁度その時をいう.
2. $j : V \to M$ が初等埋め込みとは, 任意の $\varphi(x_0, ..., x_n)$ と $a_0, ..., a_n \in V$ に対し次を満たすことをいう:
$$V \models \varphi(a_0, ..., a_n) \Leftrightarrow M \models \varphi(j(a_0), ..., j(a_n)).$$
3. j の臨界点とは $\mathrm{crit}(j) = \min\{\alpha \mid j(\alpha) > \alpha\}$ のことをいう.

Definition (超コンパクト基数)

κ が λ-超コンパクト基数であるとは, 次を満たす $j : V \to M$ が存在してその臨界点になることをいう:

$$^{\lambda}M \subseteq M.$$

κ が超コンパクト基数であるとは, 任意の $\lambda \geq \kappa$ に対して λ-超コンパクトになることをいう.

Definition (HUGE 基数)

κ が *HUGE* 基数であるとは, 次を満たす $j : V \to M$ が存在してその臨界点になることをいう:

$$^{j(\kappa)}M \subseteq M$$

定義から HUGE 基数や超コンパクト基数は可測基数である.

Definition

- 最大元を持つ半順序 $\mathbb{P}$ を強制概念という.
- $D \subseteq \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$-稠密とは順序位相の意味で稠密なことをいう.
- 任意の $\mathbb{P}$-稠密 $D \in V$ と交わるフィルターを $(V, \mathbb{P})$-ジェネリックと言う.

強制法は $(V, \mathbb{P})$-ジェネリック G を追加した新しい集合の宇宙 $V[G] \supseteq V$ を得る技術である.

Theorem (強制法定理)

次を満たす $\Vdash$ が定義可能:

$$p \Vdash \varphi \Leftrightarrow \text{任意の } (V, \mathbb{P})\text{-ジェネリック } G \text{ に対し}, p \in G \text{ ならば } V[G] \models \varphi.$$

特に, 最大元が φ を強制することを $\mathbb{P} \Vdash \varphi$ と書く.

Definition (Levy 崩壊)

次の強制概念を *Levy 崩壊*という.

- $\mathrm{Coll}(\kappa, <\lambda) = \bigcup_{X \in [\lambda]^{<\kappa}} \prod_{\alpha \in X} ({}^{<\kappa}\alpha)$.
- $p \leq q \Leftrightarrow p \supseteq q$.
- $1 = \emptyset$.

λ が到達不能であるとき, $\mathrm{Coll}(\kappa, <\lambda) \Vdash \kappa^+ = \lambda$.

Definition (Levy 崩壊)

次の強制概念を *Levy 崩壊*という.

- $\mathrm{Coll}(\kappa, <\lambda) = \bigcup_{X \in [\lambda]^{<\kappa}} \prod_{\alpha \in X} ({}^{<\kappa}\alpha)$.
- $p \leq q \Leftrightarrow p \supseteq q$.
- $1 = \emptyset$.

λ が到達不能であるとき, $\mathrm{Coll}(\kappa, <\lambda) \Vdash \kappa^+ = \lambda$.

Theorem (リフティング論法)

$j : V \to M$ が初等埋め込み, G を $(V, \mathbb{P})$-ジェネリック, H を $(V, j(\mathbb{P}))$-ジェネリックとして $j''G \subseteq H$ であるとき, $V[H]$ において次が定義可能.

- $\hat{j} : V[G] \to M[H]$.
- $j \subseteq \hat{j}$.

Example

λ が可測基数, G が $(V, \mathrm{Coll}(\omega, <\lambda))$-ジェネリックであるとき, 適切な H を取ることで $V[H]$ で次が定義出来る:

- $\hat{j} : V[G] \to M[H]$.
- $\hat{j}$ の臨界点は $\aleph_1 = \lambda$.

$$
\begin{array}{lccc}
\text{In } V & V & \xrightarrow{\quad j \quad} & M & \mathrm{crit}(j) = \lambda \\
 & \cap\!\!| & & \cap\!\!| & \| \\
\text{In } V[H] & V[G] & \xrightarrow{\quad \hat{j} \quad} & M[H] & \mathrm{crit}(\hat{j}) = (\aleph_1)^{V[G]}
\end{array}
$$

Example

λ が可測基数, G が $(V, \mathrm{Coll}(\omega, <\lambda))$-ジェネリックであるとき, 適切な H を取ることで $V[H]$ で次が定義出来る:

- $\hat{j} : V[G] \to M[H]$.
- $\hat{j}$ の臨界点は $\aleph_1 = \lambda$.

$$
\begin{array}{llcll}
\text{In } V & V & \xrightarrow{\quad\quad j \quad\quad} & M & \mathrm{crit}(j) = \lambda \\
 & \cap\!\!| & & \cap\!\!| & \quad\| \\
\text{In } V[H] & V[G] & \xrightarrow{\quad\quad \hat{j} \quad\quad} & M[H] & \mathrm{crit}(\hat{j}) = (\aleph_1)^{V[G]}
\end{array}
$$

$\rightsquigarrow$ このような状況では $\aleph_1$ 上に巨大基数的性質が乗っていると思える.

Example

λ が可測基数, G が $(V, \mathrm{Coll}(\omega, <\lambda))$-ジェネリックであるとき, 適切な H を取ることで $V[H]$ で次が定義出来る:

- $\hat{j} : V[G] \to M[H]$.
- $\hat{j}$ の臨界点は $\aleph_1 = \lambda$.

$$
\begin{array}{lccc}
\text{In } V & V & \xrightarrow{\quad j \quad} & M & \mathrm{crit}(j) = \lambda \\
 & \cap\!\!\mid & & \cap\!\!\mid & \parallel \\
\text{In } V[H] & V[G] & \xrightarrow{\quad \hat{j} \quad} & M[H] & \mathrm{crit}(\hat{j}) = (\aleph_1)^{V[G]}
\end{array}
$$

$\rightsquigarrow$ このような状況では $\aleph_1$ 上に巨大基数的性質が乗っていると思える.

Remark

$\hat{j}$ は $V[G]$ で定義可能なものではない.

Theorem (Folklore?)

κ が正則基数, λ が可測基数であるとき,

$$\mathrm{Coll}(\kappa, <\lambda) \Vdash \forall \mu < \kappa \binom{\kappa^{++}}{\kappa^{+}} \to \binom{\mu}{\kappa^{+}}_{\kappa}.$$

リフティング論法で構成した初等埋め込みを用いる.

Theorem (Folklore?)

κ が正則基数, λ が可測基数であるとき,

$$\mathrm{Coll}(\kappa, <\lambda) \Vdash \forall \mu < \kappa \binom{\kappa^{++}}{\kappa^{+}} \to \binom{\mu}{\kappa^{+}}_{\kappa}.$$

リフティング論法で構成した初等埋め込みを用いる.

Theorem (T.)

$\kappa < \lambda$ が可測基数, $\mathrm{Coll}(\kappa, <\lambda) \Vdash$"$\kappa$ は可測基数"であるとき,

$$\mathrm{Coll}(\kappa, <\lambda) * \dot{\mathcal{P}} \Vdash \forall \mu < \kappa \binom{\kappa^{++}}{\kappa^{+}} \to \binom{\mu}{\kappa^{+}}_{\kappa} \wedge \mathrm{cf}(\kappa) = \omega.$$

ここに, $\mathrm{Coll}(\kappa, <\lambda) \Vdash$"$\dot{\mathcal{P}}$ は κ 上の *Prikry* 強制".

$\mathrm{Coll}(\kappa, <\lambda)$ のときに成功した証明を Prikry 強制を反復しても再現することが出来る.

Theorem (Laver, 1982)

λ が *HUGE* 基数, $j : V \to M$ が *HUGE* 初等埋め込み, $\kappa < \lambda$ が正則基数であるとき, ある P が存在して,

$$P * \dot{\mathbb{L}}(\lambda, j(\lambda)) \Vdash \binom{\kappa^{++}}{\kappa^{+}} \to \binom{\kappa^{+}}{\kappa^{+}}_{\kappa} \wedge \kappa^{+} = \lambda.$$

P は Kunen の普遍的崩壊, $\mathbb{L}$ は Laver 崩壊.

今後の方針:

- 後続基数上の Polarized Partition の多くは飽和イデアルと呼ばれる対象を用いて証明されている.
- 飽和イデアルを経由しない "(Collapse) $\Vdash$ (Polaized Partition)" の証明を与える.
- その証明を "(Collapse) $*$ (Prikry-type) $\Vdash$ (Polarized Partition)" で試す.

Question

- $P * \mathbb{S}(\kappa, < j(\lambda))$ が *Polarized Partition* を強制することの飽和イデアルを用いない別証明は存在するか?
- $P * \mathbb{S}(\kappa, < j(\lambda)) * \dot{\mathcal{P}} \Vdash \binom{\kappa^{++}}{\kappa^{+}} \to \binom{\kappa^{+}}{\kappa^{+}}_{\kappa}$ かどうか?

- K.Tsukuura. Polarized Partition on Successors of Singular Cardinals with the GCH, RIMS kokyuroku, 2018.
- M.Foreman. Ideals and Generic Elementary Embeddings, in Handbook of Set Theory, vol.2.
- M.Gitik. Prikry-type Forcings, in Handbook of Set Theory, vol.2.
- M.Levine and D.Sinapova. Uncountably Singulizing and Weak Squares, preprint.
- P.Erdös, A.Hajnal and R.Rado. Partition relations for cardinal numbers, 1965.
- R.Laver. An $(\aleph_2, \aleph_2, \aleph_0)$-saturated ideal on ω_1", In Logic Colloquium '80, vol 108, 1982.