Dividing と Forking の気持ち

向川原 弘明

筑波大学数理物質科学研究科
博士前期課程 2 年

2019 年 12 月 7 日
数学基礎論若手の会 2019

目次

参考文献

[TZ12] Katrin Tent, Martin Ziegler, A Course in Model Theory (Lecture Notes in Logic), Cambridge University Press, 2012

[雪江 11] 雪江 明彦, 代数学 3 代数学のひろがり, 日本評論社

今発表は [TZ12] に従う.

目次

モデル理論とは?

数学における理論 (公理の集合) の性質をその具体例である "構造 (モデル)" を調べることによって明らかにする分野.

例 1 (数学における理論 (公理の集合))

ベクトル空間の公理, 群の公理, 代数閉体の公理など.

目次

設定

L を可算言語, T を無限モデルを持つ完全な理論とする.
今発表での議論は T の非常に大きな飽和モデル $\mathcal{M}$ の中で行う. つまり,

- a, b, c : $\mathcal{M}$ の有限タプル,
- A, B, C : $\mathcal{M}$ の "小さい" 部分集合,
- M : $\mathcal{M}$ の "小さい" 初等部分モデル

を意味している.

タイプ

タイプとは, $\mathcal{M}$ のある元が満たす論理式全体のこと.

記法

1. $\mathrm{tp}(a/A) = \{\varphi(x) \in L(A) \mid \mathcal{M} \models \varphi(a)\}$
2. $a \equiv_A b \iff \mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(b/A)$.

$\mathcal{M}$ の性質を調べる上で, タイプの振る舞いを考えることは非常に重要.

一様列

定義 2

$I = \langle a_i \mid i < \omega \rangle$ が A 上の一様列であるとは任意の $n < \omega$ と $i_0 < \cdots < i_n < \omega$, $j_0 < \cdots < j_n < \omega$ と $\varphi \in L(A)$ について $\mathcal{M} \models \varphi(a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(a_{j_0}, \ldots, a_{j_n})$ を満たすことを言う.

Aから見た一様列

•

"上" から見た一様列

A から見るとすごく遠くにあって "見分けがつかない".

目次

Dividing/Forking のアイデア

モデルを特徴づける "独立関係" を定義したい.

定義 3 (代数的独立)

K を体, S を K の拡大体とする. $s_0, \ldots, s_n \in S$ が K 上代数的独立であるとは, 零でない任意の K 多項式 $f(x_0, \ldots, x_n)$ に対して, $f(s_0, \ldots, s_n) \neq 0$ を満たすことを言う.

感覚的には, 互いが多項式で届かない関係が "独立".
$\Longrightarrow$ 多項式を論理式に変えて独立関係が定義できる?

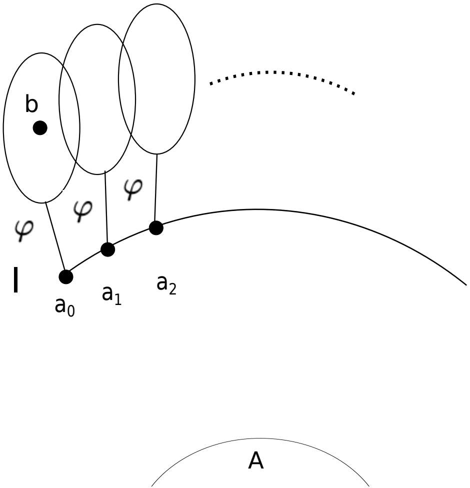
目次

Dividing="強い従属関係"

定義 4

- $\varphi(x, a)$ が A 上 divide するとは, $a_0 = a$ を満たす A 上の一様列 $\langle a_i \mid i < \omega \rangle$ で $\{\varphi(x, a_i) \mid i < \omega\}$ が inconsistent になることをいう.
- $\mathrm{tp}(b/Aa)$ が A 上 divide するとは, A 上 divide する論理式 $\varphi(x, a) \in \mathrm{tp}(b/Aa)$ が存在することを言う.

Dividing のイメージ



b が a に “強く従属” しているイメージ.

Dividing の例

Divide する論理式の例を出すのは比較的に簡単.

例 5 (代数閉体)

$a \notin acl(Ab)$, $b \notin acl(Aa)$ で, $\varphi(x, a, b)$ を $(x-a)(x-b) = 0$ と定めると $\varphi(x, a, b)$ は A 上 divide する.

例 6 (端点のない稠密全順序 $(= \mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <))$)

$a \notin A$, $\varphi(x, a)$ を $x > a$ とすると, $\varphi(x, a)$ は A 上 divide しない.

しかし, $a < b$, $\psi(x, a, b)$ を $a < x < b$ とすると $a < x < b$ は $\emptyset$ 上 divide する.

目次

Forking＝“弱い従属関係”

定義 7

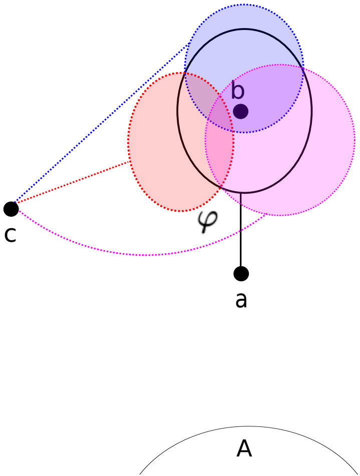
- $\varphi(x, a)$ が A 上 fork するとは, A 上 divide する有限個の論理式 $\psi_0(x, c), \ldots, \psi_n(x, c)$ で

$$\mathcal{M} \models \forall x \left[\varphi(x, a) \rightarrow \bigvee_{i \leq n} \psi_i(x, c) \right]$$

を満たすものが存在することを言う.

- $\mathrm{tp}(b/Aa)$ が A 上 fork するとは, A 上 fork する論理式 $\varphi(x, a) \in \mathrm{tp}(b/Aa)$ が存在することを言う.

Forking のイメージ



c が b に "強く従属" しているイメージ.

Forking を考えるモチベーション

nonforking には独立関係を "伸ばせる" という特徴がある：

定理 8 ([TZ12])

$\mathrm{tp}(a/B)$ が A 上 *fork* しないとき，任意の $C \supset B$ について $a' \equiv_B a$ で $\mathrm{tp}(a'/C)$ が A 上 *fork* しないものが存在する．

記法 (Nonforking independence)

$\mathrm{tp}(a/Ab)$ が A 上 *fork* しないとき，$a \downarrow_A b$ とかく．

ただ，divide しないが fork する論理式がどういうものか考えるのは非常に難しい…

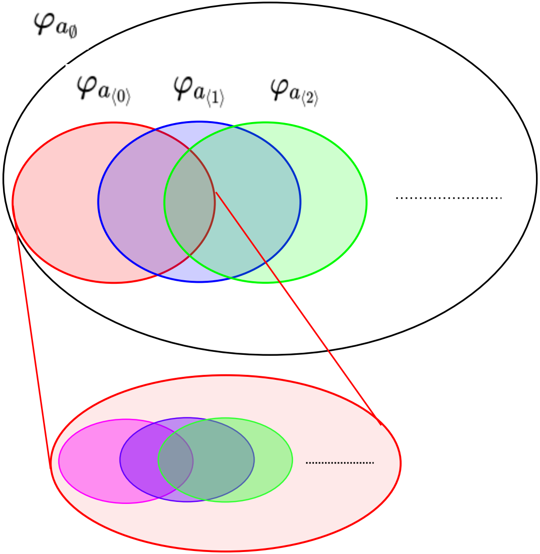
目次

単純性

定義 9 (単純性)

1. $\varphi(x, y) \in L$, $k < \omega$ と置く. $\varphi(x, y)$ が k-tree property (k-TP) を持つとは, 次の条件を満たすタプルの木 $(a_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega)$ が存在することを言う：
   - すべての $s \in {}^{<\omega}\omega$ に対して, $\{\varphi(x, a_{si}) \mid i \in \omega\}$ は k-inconsistent である.
   - すべての $\sigma \in {}^{\omega}\omega$ に対して, $\{\varphi(x, a_{\sigma \upharpoonright n}) \mid n \in \omega\}$ は consistent である.
2. 任意の $\varphi(x, y) \in L$ と $k < \omega$ について $\varphi(x, y)$ が k-TP を持たないとき, T は単純であるという.

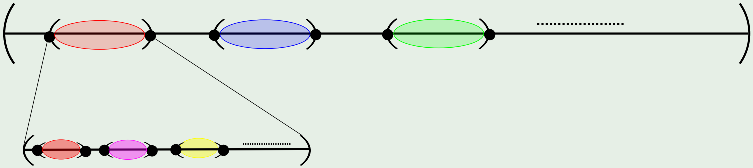
k-TP = 論理式の解集合がある程度複雑



2-TP の例

例 10 (単純ではない理論の例)

T を端点の無い稠密全順序の理論 $(= \mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <))$ とする.
$\varphi(x, y, z) = y < x < z$ は 2-TP を持つ.



よって $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <)$ は単純ではない.

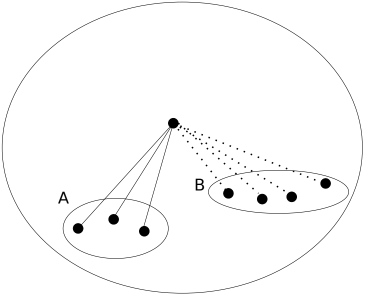
順序が入っている構造の理論は**難しい**.

ランダムグラフ

定義 11 (ランダムグラフ)

ランダムグラフとは以下を満たす無限無向グラフのこと：

1. 非反射性を満たす, つまり自分から自分への辺はない.
2. 互いに素な任意の有限部分集合 A, B について A の各点と辺を持ち, B の各点とは辺を持たない点が存在する.



ランダムグラフ

自明な論理式しか divide しないので,

例 12 (単純な理論の例)

ランダムグラフの理論は単純である.

ことがわかる.

単純理論の Dividing による特徴付け

定理 13 ([TZ12])

以下は, 同値 :

1. T は単純である.
2. 任意の B と $\mathrm{tp}(a/B)$ について, $A \in [B]^{\leq |T|}$ で $\mathrm{tp}(a/B)$ が A 上 *divide* しないものが存在する.

単純理論では,

定理 14 (T : 単純理論, [TZ12])

$\mathrm{tp}(a/Ab)$ が A 上 *divide* しないならば, $a \downarrow_A b$.

成り立っているため, **幸せな世界**.

単純理論における独立関係 $\downarrow$ の強さ

定理 15 (T : 単純理論, [TZ12])

$\downarrow$ は次を満たす：

1. *(Symmetry)* $a \downarrow_A b \iff b \downarrow_A a$.
2. *(Monotonicity and Transitivity)* $a \downarrow_A bc \iff a \downarrow_A b$ かつ $a \downarrow_{Ab} c$.
3. *(Amalgamation)* a, a', b, b' と $M \models T$ が
   - $a \downarrow_M b$, $a \downarrow_M a'$, $b \downarrow_M b'$,
   - $a' \equiv_M b'$,

   を満たしているとする．このとき, 以下を満たす c が存在する:
   - $c \equiv_{Ma} a'$, $c \equiv_{Mb} b'$,
   - $c \downarrow_M ab$.

お役立ち情報

http://www.forkinganddividing.com/
を見ると, 理論の分類とその例がある程度わかり, 面白いです.