



# 協調型論理:再帰クリプキモデルの 構築と論理の普遍的解釈

Cooperative Logic: Recursive Kripke Model and  
Universal Interpretation of Logics

原健三 2019/12/8@数学基礎論若手の会

# 導入

本発表で前提にする内容を確認し、動機を述べる。

# 論理学とは

- 論理とは「思考の形式及び法則、これに加えて、思考のつながり、推理の仕方や論証のつながり」
  - 「推理」...「既にわかっている事柄をもとに、まだわかっていない事柄をおしはかること」
  - 「論証」...「結論を主張する行為全般」
- 論理学は「論証」の構成やその体系を研究する学問
  - 数学的演算を導入した研究が「数理論理学」
  - 無限の事柄を説明するための有限の規則(形式体系)を見つけることが学問の根幹

# 動機

- 複数人リアルタイムで共有(協調)可能な論理体系をつくりたい
  - 一般の数学の論理を“そのまま”表現する
  - 競合する論理を同時に表現する
- 数理論理学と比べて遜色ない扱いやすさとする
  - 核となる概念は、数理論理学に比べて1~2個加えるだけに留めたい
  - 一般の数学の論理はどこまで少ない概念で説明がつくか
- 個々の論理のバイアスを外し、気づきを得られるように整理する手段となることを期待

# 目次

章	内容
論理学の形態	従来の論理学を俯瞰し、論理学が備えるべき性質を見る。
論理における協調の例	本発表で提唱する「協調型論理」が備える「協調」という性質に必要な事柄を例をもって確認する
協調型論理の構成要素	協調型論理で扱う対象を規定する。特に、命題は、情報と視点の対で置き換えられる。情報は、モノ・性質・帰属によって構成されるが、視点を変えるとすべてをモノとみなせる。
協調型論理における意味付けの方法	協調型論理に新しい概念を導入する方法を説明する。公理を設定することに該当する。
協調型論理における推論の方法	命題の真偽に代わって、情報がその視点で妥当であるかを判定する方法を導入する。 協調型論理では、「性質の含意」を定義することで完遂される。
協調型論理の定理	自然な性質の演算を導入し、直観主義論理の自然演繹規則を証明する。従来の論理学の一つの解釈を与え、その意味合いを考察したい。

# 論理学の形態

従来の様々な論理学を類推し、論理学が備えるべき性質にはどんなものがあるか概観する。

# 論理学の類推

論理の性質	対応する論理学	提唱	キーワード
形式性	命題論理・述語論理	アリストテレス、クリュシッポス、フレーゲ、ラッセル	三段論法、接続詞、量化詞
解析性	証明論	ライプニッツ、ウイトゲンシュタイン、ヒルベルト、ゲーデル	背理法、真理値表、不完全性定理
実証性	—（科学哲学）	ポパー、クワイン、デイヴィッドソン	帰納法と演繹法、相対主義
直観性	直観主義論理	ブラウワー、ハイティング	排中律の否定
多値性	多値論理	ウカシェヴィチ	可能性、様相、ファジー
矛盾許容性	矛盾許容論理	プリースト	爆発律の排除
個別性/普遍性	私的論理（新しい論理学）	本橋信義	共用語、メタ推論
共存性/自己定義性	協調型論理	（本資料にて提唱）	対象物の可変性、メタ視点

# 形式性(formality)

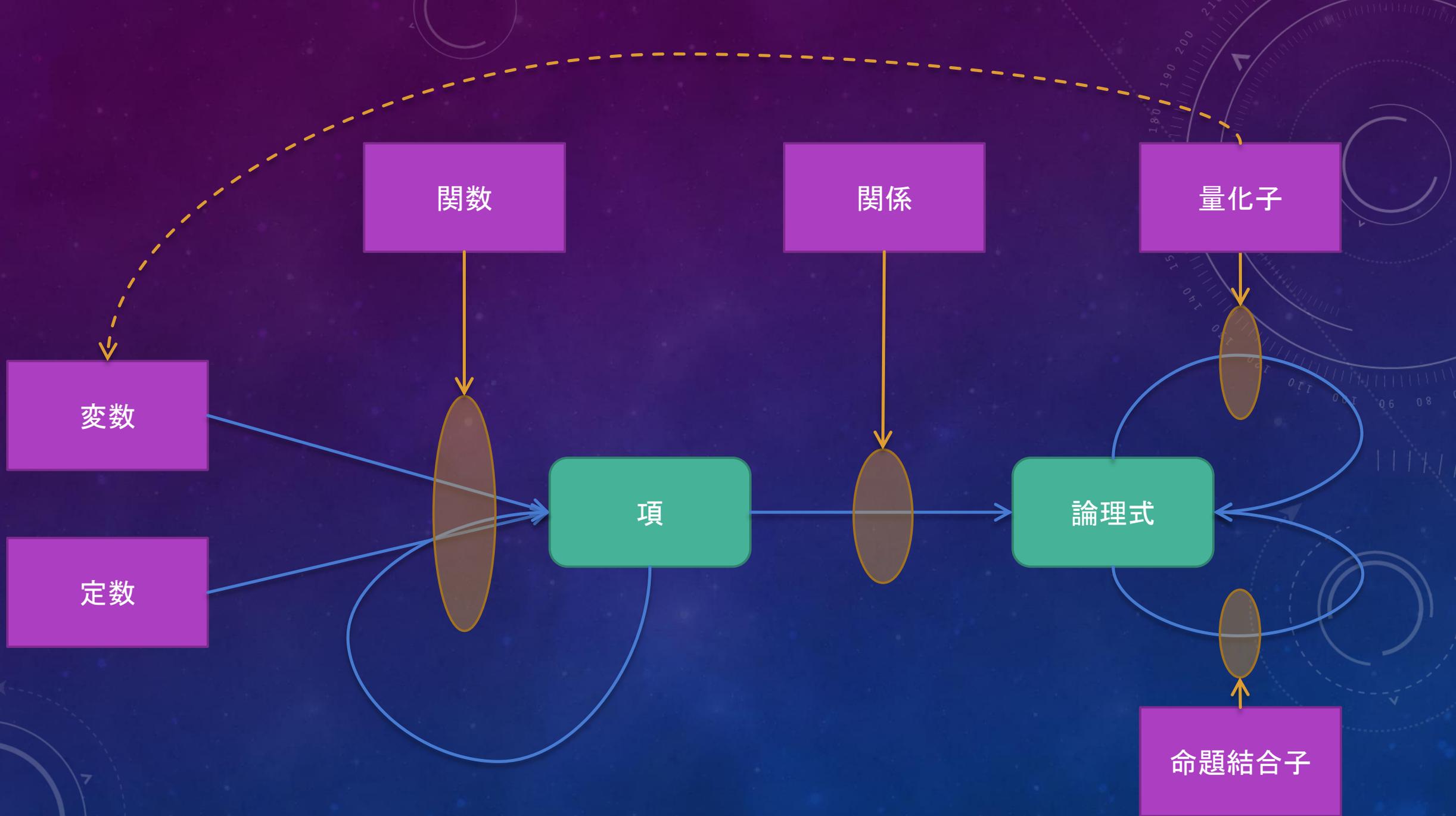
- 形式論理(Formal logic)...形式体系として整っている論理
  - 記号・文法からなる式を決定するスキーム
  - 式の真偽を決定するスキーム
- 非形式論理(Informal logic)...形式論理と比較される論理
  - 3つの形式(Barth, Krabbe)
    - 形而上学的単位 (非常に限定的→ほとんどが非形式的となる)
    - 妥当性を与える文の形式
    - 何らかの規則に基づく手続き (非常に広範→ほとんどが形式的となる)

# 解析性(analyticity)

- 数学的な取り扱いが可能であるか
- 何を対象に取り扱うか
  - 命題と論理式の真理値...命題論理
  - 項と述語による式の構成...述語論理
- 形式体系の違い
  - ヒルベルト計算
  - 自然演繹計算
  - シーケント計算

# 述語論理(predicate logic)

- 項の定義
  - 変数および定数は項
  - 項に関数を適用したものは項
- 論理式の定義
  - 項に関係を適用したものは論理式。これを原子論理式という
  - 論理式に命題結合子を適用したものは論理式
  - 論理式に量化子を適用したものは論理式
- 論理式に真偽を割り当てることを真偽値割り当てという
- 量化子の中に現れる変数を束縛変数、そうでないものを自由変数とよぶ



# 直観性(intuitiveness)

- 直観...推論などの操作を差し込まない、直接的な認識
- 2つの直観主義
  - ブラウワーのオリジナルの考え
    - 証明は、数学的直観に基づく構成によってのみ成されるべき
    - 「非存在の矛盾から背理法で存在を導く」やり方は、推論を差し込んでいる
    - ブラウワーは明確な定義は与えていない
  - ハイティングの形式化
    - 直観主義論理

# 直観主義論理(Intuitionistic logic)

- 証明論の視点では、古典論理の制限であって**排中律**や**二重否定除去**が公理として許容されないもの
  - 排中律:  $p \vee \neg p$
  - 二重否定除去:  $\neg \neg p \rightarrow p$
- 形式体系LJ、または、NJによって証明を与えられる
  - $\longleftrightarrow$ 古典論理LK、NK
- 意味論
  - (直感的には)命題は「成り立つもの」「成り立たないもの」「成り立つかまだ分からないもの」に分かれる
  - ハイティング代数
  - クリプキモデル

# 多値性(Truth-variability)

- 式に対する判断(真理値)を真か偽か以外を許容する論理
- どれだけの判断を許容するか
  - 3値論理
  - 様相論理
  - ファジィ論理
- どのような意味の判断を許容するか
  - 不定...ウカシェヴィッチ
  - 未定義...クリーネ
  - 無意味...ボフバール

# 矛盾許容性(Paraconsistency)

- 矛盾である主張を許容できるもの
  - 爆発律(principle of explosion): 矛盾からあらゆる式の成立を導く ( $\perp \rightarrow A$ )
  - 爆発律を否定する論理
- どのように爆発律を排除するか
  - パラドックス論理(LP)...真偽値割り当てを関係とする。選言三段論法が否定される
  - 相関論理...弱化規則(WR)を許容しない
  - 双対直観論理... $A \wedge \neg A$ から $\perp$ を導かない

# 相関論理(relevance logic)

- 実質含意 $P \Rightarrow Q$ は共通の非論理定項を含む場合のみ真とする
- 実質含意(material implication)...以下の3つの関係をすべて一つとみなした関係
  - 条件関係(conditional relation)...「conditio sine qua non」「これなければあれなし」
  - 含意関係(implicational relation)
  - 帰結関係(entailment relation)
- B, DW, DJ, TW, RW, T, R, E, RWなど多数の体系が存在
- 部分構造論理により定式化
  - シーケント計算の弱化規則を除外する

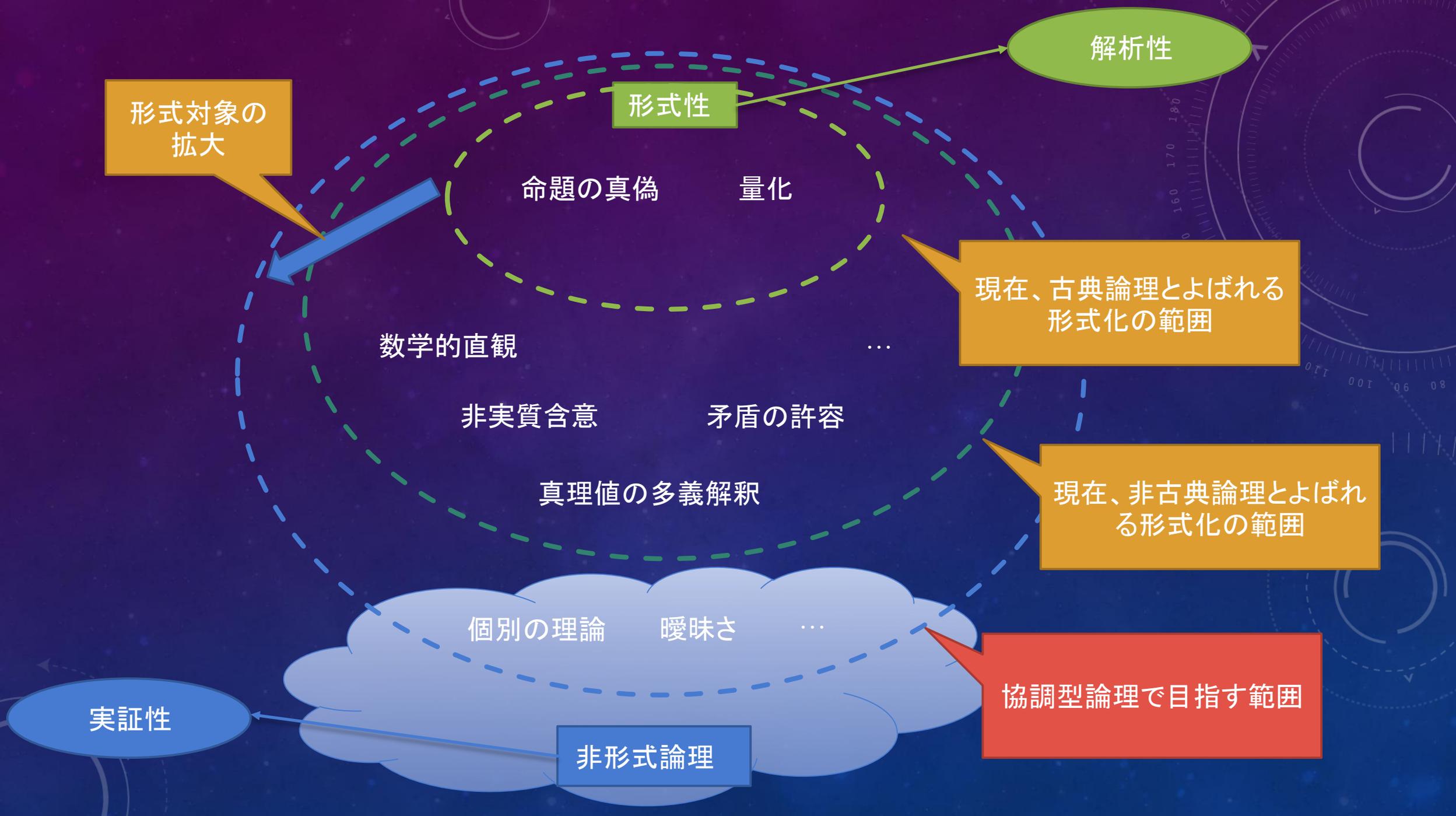
# 個別性(Individuality)/普遍性(Universality)

- 個別性...特定の個人や社会によってのみ通用する性質
- 普遍性...いつでも誰でも使える性質
- 本橋の新しい論理学(私的論理)
  - 推論規則に論理語以外の共用語(特定の個人や社会によってのみ通用する言葉)を許容する
  - 推論規則を導出する推論(メタ推論)を許容する。その推論規則が従来の論理語のみからなる規則とする
  - 論理＝推論規則の集まりは、理論から一意に定まる

# 私的論理(personal logic)

$\varphi = [\text{ソクラテスは人間、ゆえに死ぬ}]$   
 $ass(\varphi) = [\text{ソクラテスは人間}], \quad con(\varphi) = [\text{ソクラテスは死ぬ}]$   
 $pre(\psi) = [\text{人間}], \quad suc(\psi) = [\text{死ぬ}]$   
 $\psi = [\text{すべての人間は死ぬ}]$

- 例) 推論 $\varphi = [\text{ソクラテスは人間、ゆえに死ぬ}]$ 
  - 仮定 $ass(\varphi) = [\text{ソクラテスは人間}]$
  - 結論 $con(\varphi) = [\text{ソクラテスは死ぬ}]$
- 推論は私的でも、「仮定」と「根拠」から「結論」を導くメタ推論は形式的(普遍的)
  - 法則文:  $\psi = [\text{すべての} pre(\psi) \text{は、} suc(\psi) \text{である}]$ という形式の文。 $pre(\psi)$ を前条件、 $suc(\psi)$ を後条件という。
  - $ass(\varphi) = [c \text{が} pre(\psi)]$ かつ $con(\varphi) = [c \text{が} suc(\psi)]$ となる $c$ が取れるとき、 $\psi$ を $\varphi$ の「根拠法則」とよぶ
  - $\psi = [\text{すべての人間は死ぬ}]$ とすると、 $c = \text{ソクラテス}$ が根拠条件を満たすので $\psi$ は $\varphi$ の根拠法則
- $con(\varphi)$ を示す行為は、 $ass(\varphi)$ および $\psi$ を示す行為に帰する



解析性

形式性

形式対象の  
拡大

命題の真偽 量化

現在、古典論理とよばれる  
形式化の範囲

数学的直観

非実質含意 矛盾の許容

現在、非古典論理とよばれる  
形式化の範囲

真理値の多義解釈

個別の理論 曖昧さ

協調型論理で目指す範囲

実証性

非形式論理

# この章のまとめ

- 論理学は形式化を経て、数学的な取り扱いできる(解析性)ようになる
- 時代とともに形式化の範囲は拡大している
  - 直観主義論理
  - 多値論理
  - 矛盾許容論理
- この後の章で提唱する協調型論理は、形式化の延長で、今までの論理学にない特徴を捉える
  - 続く章でその特徴を例示する

# 論理における協調

論理において協調を実現するために必要になる要素を例示をもって確認する。

# 共存性(Coexistence)/自己定義性(Self-definability)

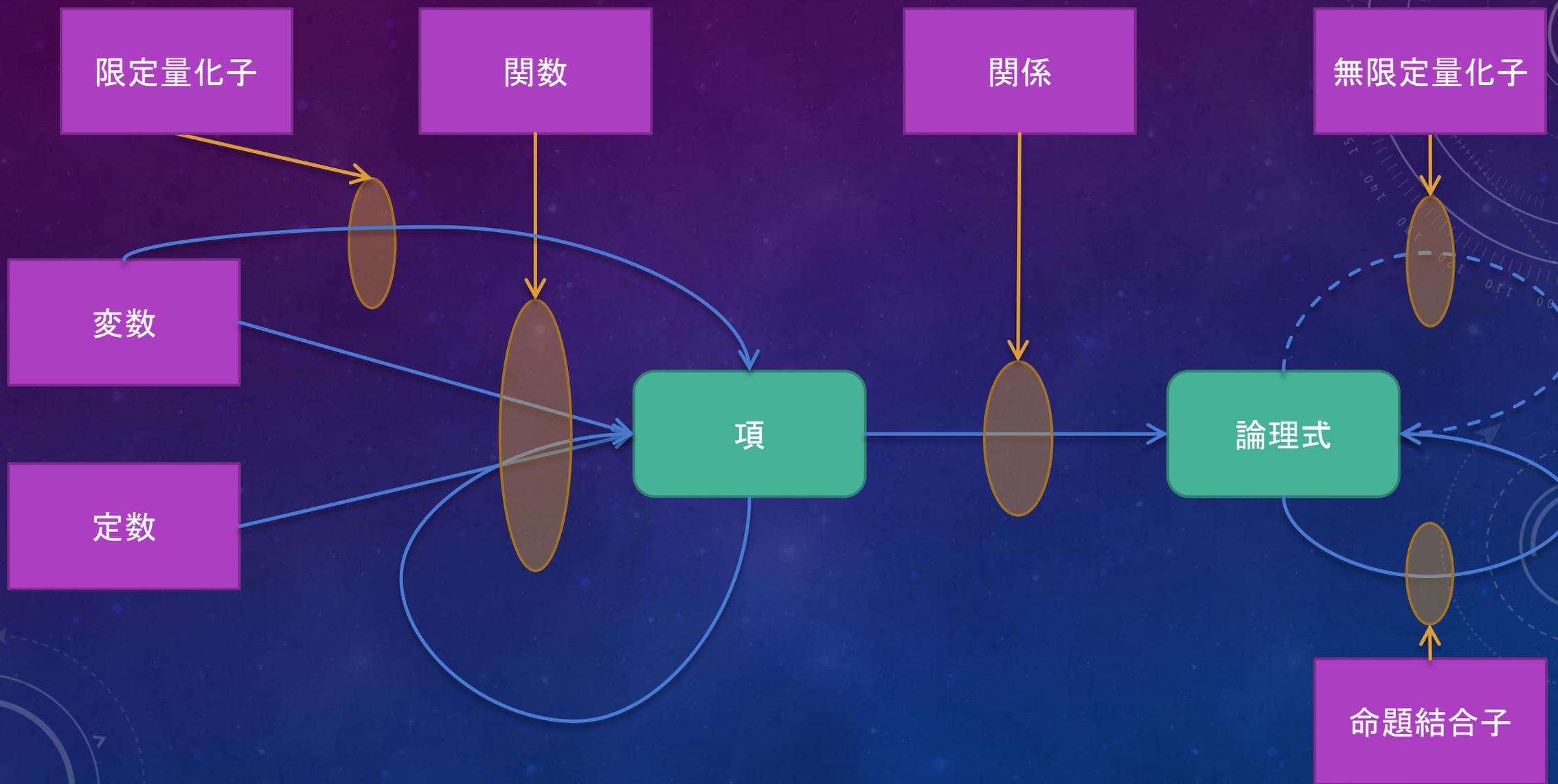
- 複数の論理の正当性を主張可能な論理
- ルドルフ・カルナップの寛容の原則(Principle of tolerance)
  - 形式言語の優劣はなく目的に合わせて許容すればよいという考え
- 「すべての論理を表現可能な論理」があると仮定すると、
  - その論理は自分自身を定義できなければならない
  - そのような論理が存在するかはここでは問題としていない

# 協調型論理(Cooperative Logic; Cool)

- 複数人の様々な形式の論理を同時に成立可能な包括的な論理
  - 互いの論理のやり取りを「情報」に着目して解決する
  - 情報...不確定なものを解決するもの。伝達可能な知識。
- 協調型論理で扱うさまざまな論理の相違点
  - 情報の構成の仕方
  - 言葉の意味の取り方
  - 公理の取り方
  - 推論規則の取り方

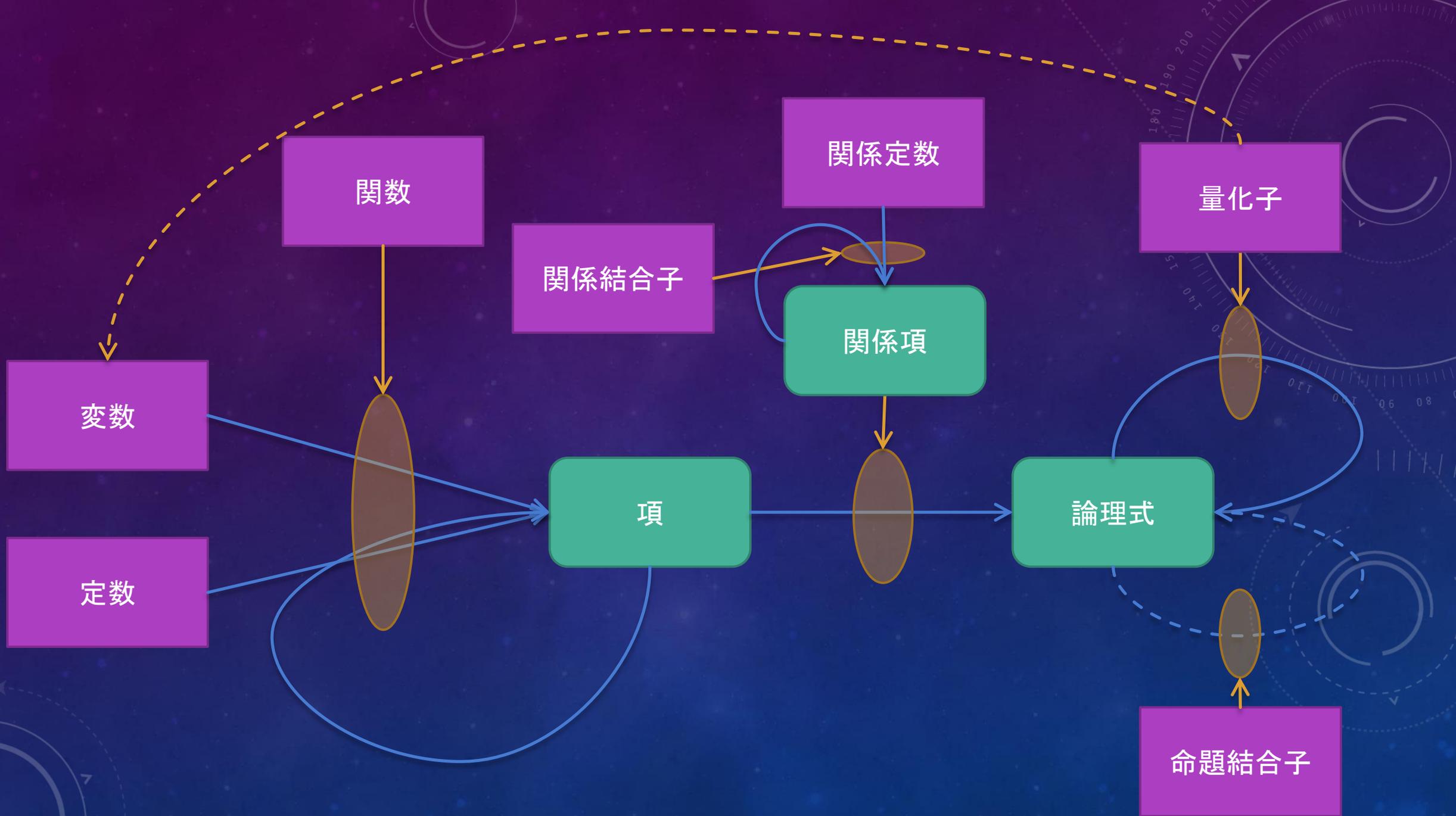
# 限定量化と無限定量化

- 扱いたい命題の例:「**2を除く素数**は奇数である」
- 量化...議論領域の個体の量を指定すること
  - 全称量化...すべての
  - 特称(存在)量化...ある
- 限定量化...主語に限定された範囲での量化
  - 「**2でない、そして、素数であるすべての数**は奇数である」
- 無限定量化...主語から独立した量化
  - 「すべての数について、**その数**が2でない、かつ、素数、ならば、奇数である」



# 関係結合子

- 扱いたい命題の例:「3以上の素数は偶数でない」
- 命題結合子(論理結合子)
  - 命題から命題を導く関数 (そして、あるいは、ではない、ならば)
  - 「...ならば、その数は偶数、ではない」
- 関係結合子
  - 関係から関係を導く関数 (かつ、または、でない)
  - 命題結合子から対応するものが取れる(例:“かつ”という関係結合子が命題結合子“そして”から抽出できる)



# 言葉の意味の取り方の例

- 言葉の定義が違う2つの論理
  - 例: 自然数を0を含むものと含まないもの(学派の違い)
- 同じ言葉が複数のものを指す
  - $\beta$ 関数(ルシャンドル、ゲーデル)
- 単純な誤り

# 公理の取り方の例

- (仮定なしに)矛盾を含む論理
  - 数理論理学では一つでも認めるとすべての命題が真になってしまう
- 複数の人が同時に別々のことを考える状況
  - 例)選択公理(AC)を主張する人、 $\neg$ ACを主張する人
- 仮説・予想

# この章のまとめ

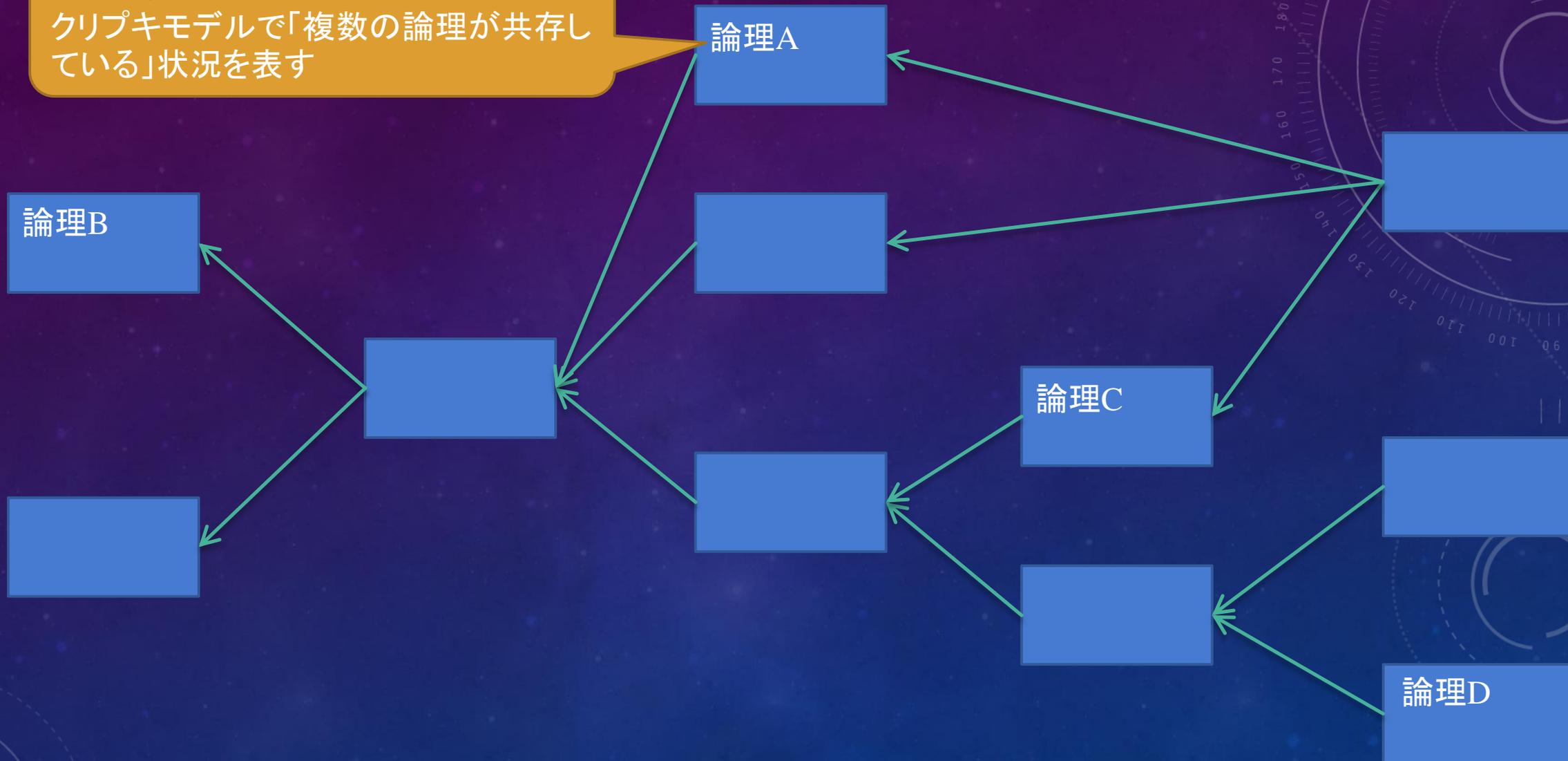
- 協調型論理では、「複数の論理が同時に成立する」という共存性を取り扱うことを目指す
- 異なる論理の間にあるずれを解消し、情報をやり取りできるようにする必要がある
  - 情報の構成の仕方
  - 言葉の意味の取り方(曖昧さ)
  - 公理・推論規則の取り方
- 続く章では、協調型論理における情報の構成の仕方を説明する
  - いかなる論理(自分自身を含む)も表現できるように情報を構成する

# 協調型論理の構成

協調型論理における情報の構成の仕方を説明する。

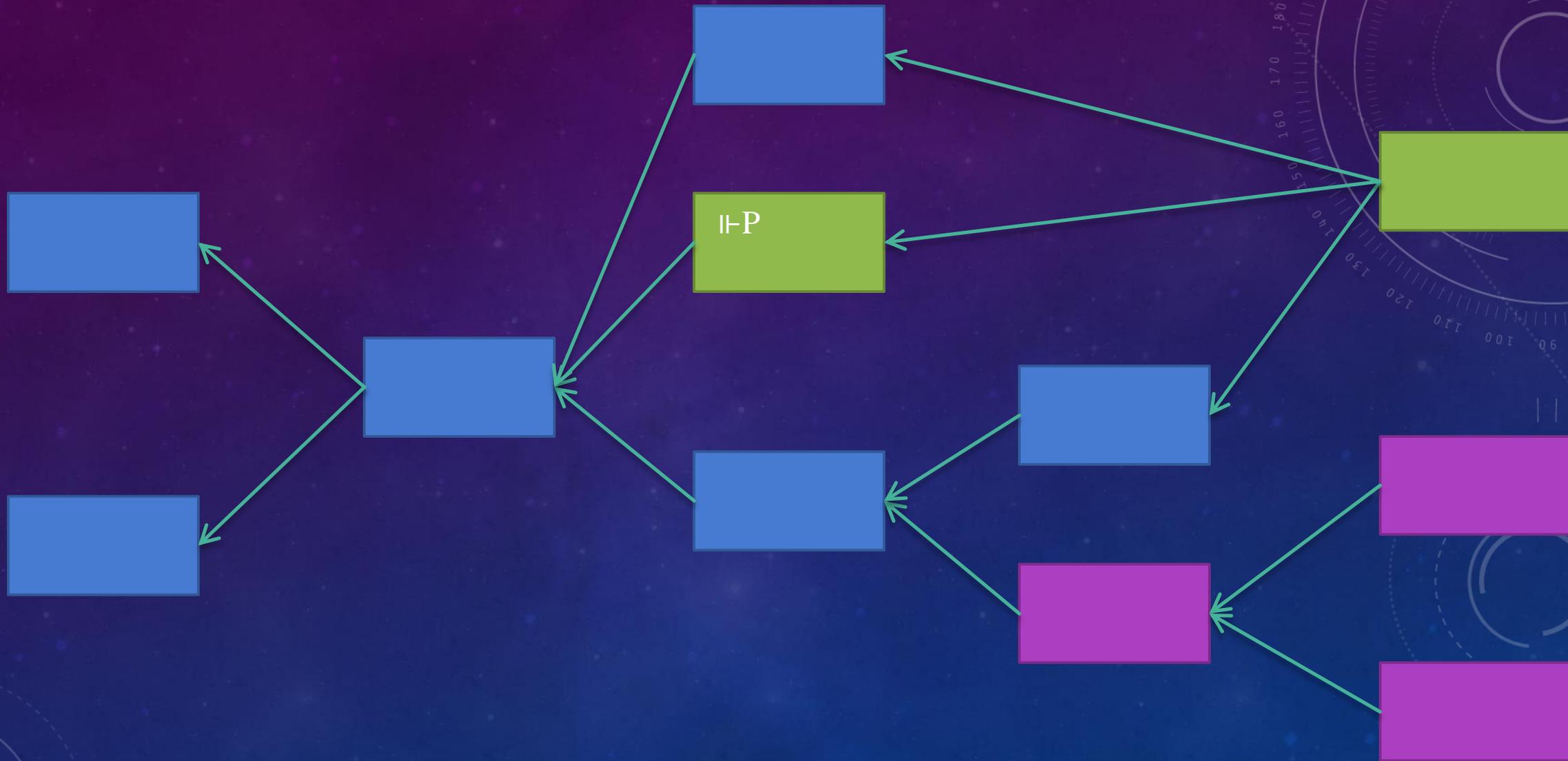


アイディア：  
クリプキモデルで「複数の論理が共存している」状況を表す



# 直観クリプキモデル(intuitionistic Kripke model)

- $\langle W, \geq, \Vdash \rangle$ : 直観クリプキモデル
  - $\langle W, \geq \rangle$ : 半順序クリプキフレーム(preorder Kripke frame)
  - $W$ の元をクリプキノード
  - $\Vdash$ を強制関連(forcing relation)
- $w, u$ をクリプキノード、 $P$ を命題とすると、 $u \geq w$ かつ  $w \Vdash P$ ならば、 $u \Vdash P$
- $A, B$ を命題とする。 $u \geq w$ かつ  $u \Vdash A$ となるすべての  $u$ が、 $u \Vdash B$ となるとき、 $w \Vdash A \rightarrow B$ と定める
  - $w \Vdash \neg P$ を、 $w \Vdash P \rightarrow \perp$ で定める ( $u \Vdash P$ となる  $u$ が、 $w$ 上でない)



# 情報の強制と受容

クリプキモデル	協調型論理
クリプキノード	視点パッケージ
$\cong$	$\subset$
命題	数学的情報
$\Vdash$	$\Vdash$
	$\vDash$

- **視点パッケージ**(単に、**パッケージ**とも) : class
  - $\subset$ ...**視点インポート**(単に、**インポート**とも) : `subc<$(パッケージ, パッケージ)>`
- **数学的情報**(単に、**情報**とも) : class
  - $\Vdash$ ...**強制** : `subc<$(パッケージ, 情報)>`...定義することに該当
  - $\vDash$ ...**受容** : `subc<$(パッケージ, 情報)>`...定義ないし証明により受け入れることに該当
- **強制、受容、インポートの公理** ( $\varphi, \psi$ をパッケージ、 $A$ を情報とする)
  - $\varphi \Vdash A$ , ならば、 $\varphi \vDash A$
  - $\varphi \subset \psi$ , そして、 $\varphi \Vdash A$ , ならば、 $\psi \Vdash A$

# 情報の成立

- 「**aはXである**」という認識そのものが情報
  - aは、**数学的対象物**(または、単に**モノ**) : class
  - Xは、**数学的性質**(または、単に**性質**とも) : class
- **情報成立**(単に、成立とも) :  $\text{attr}\langle \$(\text{モノ}, \text{性質}) \mapsto \text{情報} \rangle$ 
  - $(a, X)$ .成立、は、「aはXである」を表す。 $[a : X]$ と書く。
- 性質Xもモノとして認識できる。
  - $Y$  = 「情報として成立する対である」という条件とすると、その認識下で  $[(a, X) : Y]$  が情報となる

# 対象物の認識

- すべての識別できる対象がモノであると考える
- モノに付随する概念
  - 識別性...一意な記号によってモノ同士を同じ対象か別の対象か区別できる
  - 可変性...性質が無数に考えられ、常に多義である
  - 依存性...別のモノの性質によって、そのモノの性質が特徴付けられる
- 直接特徴付け可能なモノを変数、他のモノを通してのみ特徴付け可能なモノを項とよぶ
  - 変数 :  $\text{subc}\langle\text{モノ}\rangle$
  - 項 :  $\text{subc}\langle\text{モノ}\rangle$

# 依存性の記述

- **帰属** : class
  - **attr**と書く。
- **項生成**(または、単に生成とも) :  $\text{attr}\langle \$(\text{モノ}, \text{帰属}) \mapsto \text{モノ} \rangle$ 
  - $\text{モノ}_x$ , 帰属  $\mathcal{A}$  の項を「 $x.\mathcal{A}$ 」または「 $\mathcal{A}(x)$ 」と書く
- **帰属元条件** :  $\text{attr}\langle \text{帰属} \mapsto \text{性質} \rangle$ 
  - その帰属を使って項を生成してよいかを表す
- **項の健全性**
  - $\varphi$  をパッケージ、 $x$  をモノ、 $\mathcal{A}$  を帰属とする。 $\mathcal{A}$  の帰属元条件  $\text{sr}(\mathcal{A})$
  - $\varphi \models [x : \text{sr}(\mathcal{A})]$  であるとき、項「 $x.\mathcal{A}$ 」は  $\varphi$  で健全であるという。

# 性質の適用範囲

- **適用範囲** : attr<性質  $\mapsto$  性質>
  - その性質を述語に使うて情報成立してよいかを表す
- **クラス** : subc<性質>
  - 適用範囲をもたない性質。classと書く。
- **サブクラス** : subc<性質>
  - 適用範囲をもつ性質。subc<(適用範囲)>と書く。
  - subc<(適用範囲)>を、「(適用範囲)性質」とも書く。例) 帰属性質、情報性質、性質性質(これはメタ性質とも)
- **情報の健全性**
  - $\varphi$ をパッケージ、aをモノ、Xを性質とする。Xの適用範囲  $\text{range}(X)$
  - $\varphi \models [a : \text{range}(X)]$  であるとき、情報  $[a : X]$  は $\varphi$ で健全であるという。

凡例:

クラス



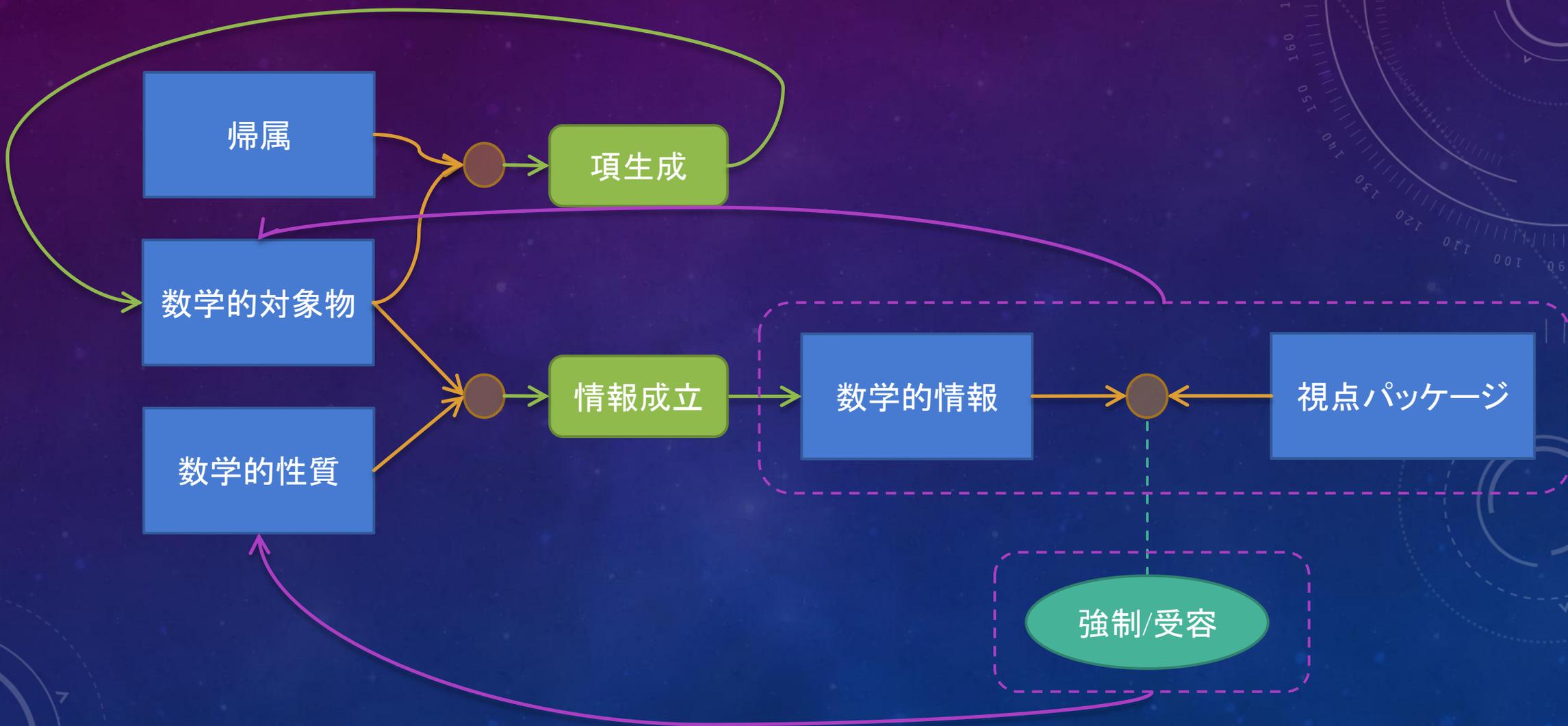
組

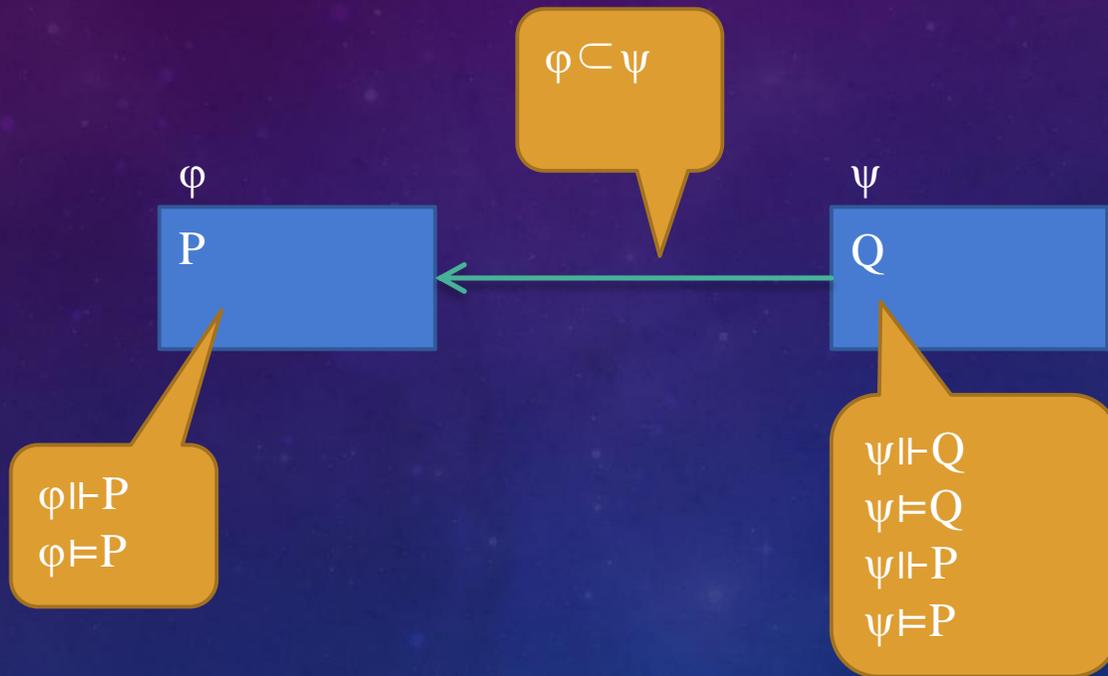


帰属



性質





# メタ

$\varphi \Vdash P$

$\varphi \subset \psi$

$\psi \Vdash Q$

メタ $\Vdash(\varphi \Vdash P)$

メタ $\Vdash(\varphi \Vdash P)$

メタ $\Vdash(\psi \Vdash P)$

...

$\varphi \subset \psi$

$\varphi$

P

$\psi$

Q

$\varphi \Vdash P$

$\varphi \Vdash P$

$\psi \Vdash Q$

$\psi \Vdash Q$

$\psi \Vdash P$

$\psi \Vdash P$

メメタア...



波紋のスゴさが「言葉」ではなく「心」で理解できたッ！

...



「「「...」」を神が決めた」ということを???が決めた

メタメタメタ



「「「...」」を協調型論理が決めた」ということを神が決めた

メタメタ



「「...」を我々が決めた」ということを協調型論理が決めた

メタ



「φさん、ψさんが決めた」ということを我々が決めた



φさん、ψさんがP, Qであると決めた

# 定義していない概念についての注意

- 自然数 : class...組を定義するのに必要
- 組(x, y, ...) : class
  - 自然数に帰属するインデクサを定義...インデクサ : attr<\$(組, 自然数)  $\mapsto$  モノ>
  - インデクサに対する性質で特徴付け... $\tau$ を組、 $i$ を自然数とする。 $(\tau, i)$ .インデクサを $\tau[i]$ と書く。 $\tau[i] = x$
  - サイズ : attr<組  $\mapsto$  自然数>...例)  $(x, y)$ .サイズ = 2
  - 条件 : attr<組  $\mapsto$  組性質>... $\tau$ を組、 $X, Y, \dots$ を性質とする。 $[\tau : (X, Y, \dots)$ .条件]は、 $[\tau[0] : X]$ 、 $[\tau[1] : Y]$ 、...
  - $(X, Y, \dots)$ .条件を $\$(X, Y, \dots)$ と書く。
- 量化...全称は組性質、特称はメタ性質で定義できる。
  - 全体 : attr<組  $\mapsto$  性質>... $(x, y, \dots)$ .全体を、 $\forall(x, y, \dots)$ と書く。どれかに該当することを表す。
  - 存在 : subc<性質>... $X$ を性質とし、 $[X : 存在]$ を $\exists X$ と書く。その性質を満たすモノがあることを表す。

# この章のまとめ

- 論理が異なるかもしれない複数の理論を表現するためにクリプキフレームを考える
  - クリップキノードを視点パッケージとよび、命題を数学的情報とよぶ
- パッケージと情報との間に強制関連が成り立つことも情報として扱う。
  - それらの情報を取り扱う視点パッケージが付随する。これをメタパッケージとよぶ。
- 情報は、数学的対象物と、数学的性質から構成される
  - 依存性を扱うために、帰属が導入される
  - 性質や帰属、パッケージも、モノとして構成される
- 続く章では、モノに意味を定める方法を説明する
  - この章の諸概念は、その後で意味付けされる

# 協調型論理の意味付け

協調型論理の中で、言葉の意味を定義する方法を説明する。公理化に該当する。

# モノを定義する

- 識別子により識別して複数の情報を加える
  - $\varphi \vdash [a : X]$ を加えていく。 $\varphi$ を省略してよいときは、 $[a : X]$ とだけ書く。
- 情報を加えることで可変性を減らしていき実用上問題ないレベルまで特定する
  - 例) 3の定義の仕方の例
  - 自然数における定数である。素数である。奇数である。そのような数の中で最も小さい。
  - 0の次の次の次にあたる
- パッケージによって受容する情報の量が違うので特定度合いも異なる



問.

お母さんはマミちゃんにりんごを一つ手渡して、隣の部屋の皿の上に置いておくように命じた。そのあとお母さんが隣の部屋に行ったときに皿の上にあるりんごが、手渡したりんごと同じものかどうかを判別する方法を説明せよ。

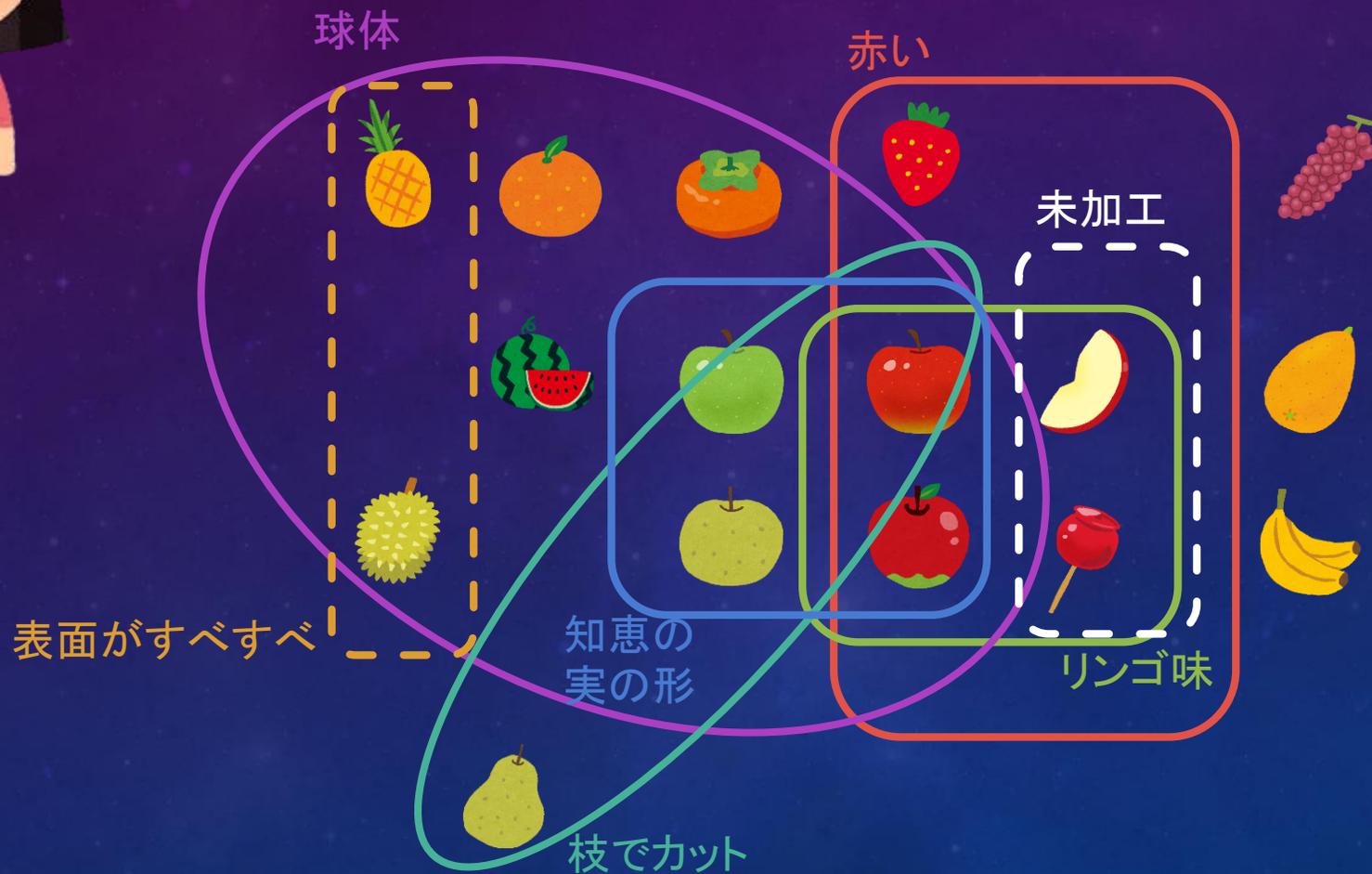
回答にあたって、あなたは以下の事実を考慮してもしなくてもよい。

- マミちゃんは受け取ったりんごを食べてしまった
- 仕方ないので隣の部屋にあったみかんを皿の上に置いた
- このままではバレると思い、錬金術によりみかんをりんごに変えた





# お母さんの人生経験の中で出会った果物



## お母さんの視点パッケージ

## マミちゃんの視点パッケージ

球体



赤い



枝でカット



知恵の実の形



表面がすべすべでない



リンゴ味



未加工でない



お母さん  $\models$  (   $\neq$   )

マミちゃん  $\models$  (   $=$   )

# 性質を定義する

- 性質をモノとしてみれば、モノと同じように定義できる
- 性質に対する性質(メタ性質)によって、性質の可変性を減らしていく
- **メタ性質の2種類の定義方法**
  - **外延**: 中に属するものをすべて列挙する定義法
    - 性質Xは $x_1, \dots, x_n$ によって満たされる
  - **内包**: 属するために満たすべき条件を明示する定義法
    - 性質Xは $P(x)$ を真とする $x$ によって満たされる
- 協調型論理においては、外延と内包は相補的に実現される

# 対象物分類

- **対象物分類**(単に、**分類**とも) :  $\text{attr}\langle \$(\text{モノ}, \text{パッケージ}) \mapsto \text{性質} \rangle$ 
  - モノ $x$ に対し、「 $x$ のようなモノ」を表す性質
  - パッケージ $\varphi$ によって、 $x$ に対する情報の量が異なるので、性質の意味することが変わる
  - $(x, \varphi)$ .分類は、 $x$ を $\varphi$ で見たすべての情報が示す性質を持つ。 $x@{\varphi}$ と書く
- **分類の公理**(厳密な定義は後述)
  - $a, b$ をモノとし、 $[b : a@{\varphi}]$ であるとは、 $\varphi \models [a : X]$ であるような性質 $X$ に対し、 $[b : X]$  (内包公理)
  - さらに、上記の $a@{\varphi}$ のような他の性質 $Y$ があつて、 $[c : Y]$ 、ならば、 $[c : a@{\varphi}]$  (余計な情報を持たない=最可変)
- **分類のパッケージの省略記法**(分類のパッケージを省略)
  - パッケージ $\varphi$ において、モノ $x$ に関する情報 $A$ が成り立つとき、 $x@{\varphi}$ を  $\{x \text{ s.t. } A\}$  と書く。
  - 例)  $\{a \text{ s.t. } [a : X]$ 、そして、 $[a : Y]\}$

# ラッセルの逆理

- 与えられた $\varphi$ に対し、 $\varphi \models [X : X.\text{否定}]$ が成り立つような $X$ を自己否定性質(非自己叙述的とも)とよぶ
  - **自己否定** : attr<パッケージ  $\mapsto$  性質>...ここでは、「 $\varphi$ .自己否定」を $\mathcal{A}(\varphi)$ と書く
  - $\varphi \models [X : X.\text{否定}]$ とするとき、 $\mathcal{A}(\varphi) = X@ \varphi$
- ラッセルの逆理(協調型論理 ver.)
  - $\varphi \Vdash [\mathcal{A}(\varphi) : X@ \varphi]$ 、ならば、 $\varphi \models [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\varphi).\text{否定}]$ となり、 $\varphi \models \perp$
  - $\varphi \Vdash [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\varphi).\text{否定}]$ 、ならば、 $\varphi \models [\mathcal{A}(\varphi) : X@ \varphi]$ となり、 $\varphi \models \perp$
- ラッセルの逆理は「パッケージ $\varphi$ 自身で分類した性質に、情報を加えるべきでない」ことを表す
  - 異なるパッケージ $\psi$ で、 $\psi \Vdash [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\varphi)]$ 、または、 $\psi \Vdash [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\varphi).\text{否定}]$ 、は議論できる
  - $\psi \Vdash [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\varphi).\text{否定}]$ 、ならば、 $\psi \models [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\psi)]$ であるが、 $\psi \models [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\varphi)]$ は導かない ( $\psi \neq \perp$ )

# 帰属を定義する

- 2種類の定義...**関係式と帰属元の含意関係**による定義
- 帰属元の性質に対する項の性質を定義する(関係式)
  - **対応** :  $\text{attr} \langle \$(\text{性質}, \text{性質}) \mapsto \text{帰属性質} \rangle$
  - 性質  $X, Y$  に対し、 $[\mathcal{A} : (X, Y). \text{対応}]$  は、 $[x : X]$  から生成する項が  $[\mathcal{A}(x) : Y]$  となる。 $[\mathcal{A} : \text{attr} \langle X \mapsto Y \rangle]$  と書く
  - 例:  $[\text{手} : \text{attr} \langle \text{人} \mapsto \text{指が5本} \rangle]$ 、そして、 $[\text{手} : \text{attr} \langle \text{鳥} \mapsto \text{羽} \rangle]$
- 帰属元の含意関係による定義
  - 変数をとって関数を定義することに該当(含意については後述)
  - 例) 帰属  $f$  に対し、 $[x : \text{自然数}]$ 、ならば、 $f(x) = x * 2$ 。便宜上、 $[f : \text{attr} \langle E(x) \mapsto E(x * 2) \rangle]$  と書ける。
  - 関係式は、帰属元の含意関係により表現できる。 $[x : X]$ 、ならば、 $[\mathcal{A}(x) : Y]$

# この章のまとめ

- モノを意味付けするために、情報を加えて曖昧さを減らしていく
  - 一意になるまで曖昧さを減らしたモノを定数とよぶ
- モノを意味付けする情報を作るために、性質を意味付けする必要がある
  - 性質の意味付け方法には「外延」「内包」の2種類がある
  - 相補的に定義される「充足」「分類」により実現される
- ラッセルの逆理は、「特定のパッケージが矛盾する」という形で許容される
  - 「性質を、分類したパッケージ自身で判断しようとする、真でも偽でも矛盾する」という事実を示唆
  - 内包を正しく扱うために、メタパッケージが必要
- 続く章では、協調型論理の中で推論する方法を説明する
  - この章での意味付けは、その推論に基づき公理化される

# 協調型論理の推論

協調型論理における推論規則の取り方について説明する。証明を可能とする。

# 協調型論理における推論

- 推理の流れ

- 論証...情報Aを主張する＝結論がAとなる推件Rを導出する
- 推論...推件Rがパッケージ $\phi$ で妥当であると主張する。 $[R : \phi.妥当]$ を確認する規則が推論規則。
- 証明...その視点で既に受容されている情報(定義または別の主張)に帰着させる

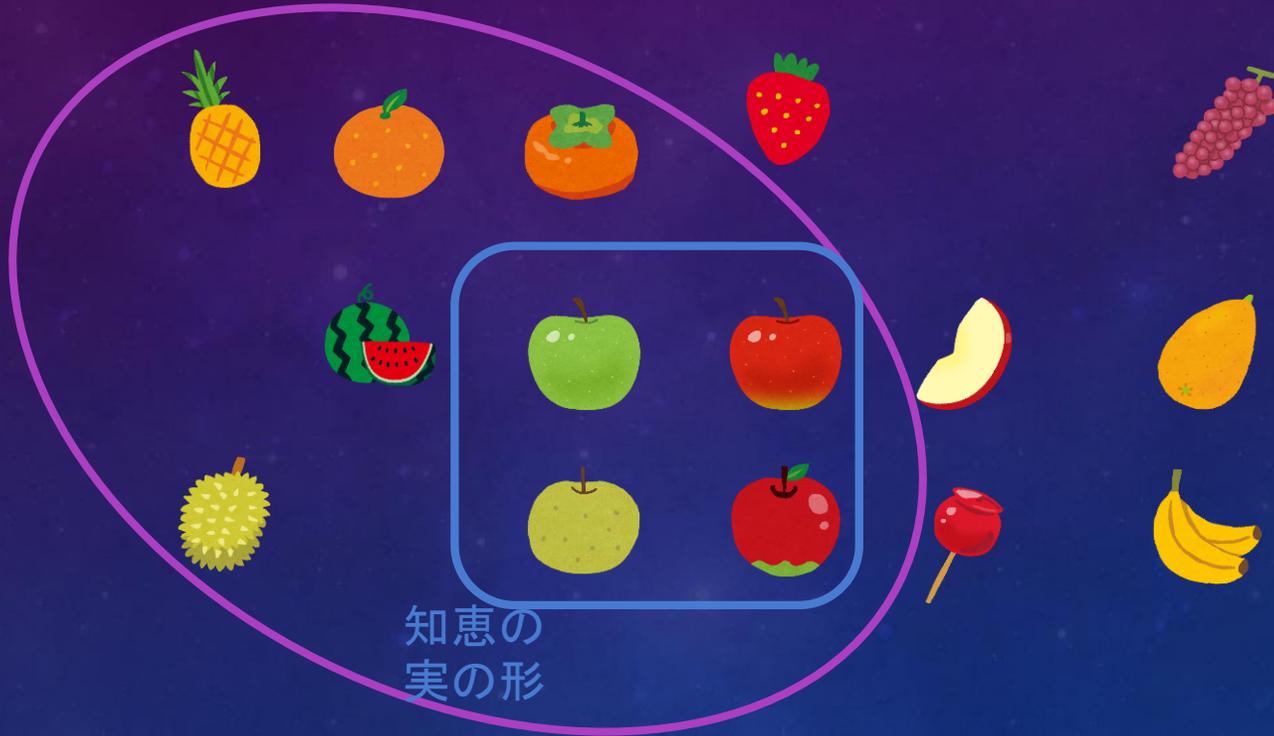


# 含意から導出される推件

- $\Rightarrow$ ...性質含意(単に、含意とも):  $\text{subc}\langle\$(性質, 性質)\rangle$ 
  - 性質X, Yに対し、情報  $[(X, Y) : \text{含意}]$  のことを「 $X \Rightarrow Y$ 」と表す
- $\vdash$ ...含意推件導出(または、単に導出とも):  $\text{attr}\{\$(モノ, 性質, 性質) \mapsto \text{推件}\}$ 
  - 性質X, Yに対し、推件「(a, X, Y).導出」のことを  $[a : X] \vdash [a : Y]$  と表す
- 含意推件導出の公理
  - $([a : X] \vdash [a : Y]).\text{結論} = [a : Y]$
  - $[[a : X] \vdash [a : Y] : \varphi.\text{妥当}] \Leftrightarrow \varphi \models X \Rightarrow Y$ 、そして、 $\varphi \models [a : X]$
  - $X \Rightarrow Y$ 、とは、 $[a : X]$ であるようなモノa、ならば、 $[a : Y]$ が成り立つことを表している。

お母さん = (知恵の実の形 ⇒ 球体)

球体



知恵の  
実の形

# 最可変性と最不変性

- **全含** : attr<メタ性質  $\mapsto$  メタ性質>
  - $[M: \text{メタ性質}]$ とし、 $[I: M.\text{全含}]$ とすると、 $M \Rightarrow \{X \text{ s.t. } I \Rightarrow X\}$  ( $M$ である性質をすべて含意する)
- **全余** : attr<メタ性質  $\mapsto$  メタ性質>
  - $[M: \text{メタ性質}]$ とし、 $[C: M.\text{全余}]$ とすると、 $M \Rightarrow \{X \text{ s.t. } X \Rightarrow C\}$  ( $M$ である性質にはすべて含意される)
- **最可変性質**(または、単に**最可変**) : attr<メタ性質  $\mapsto$  性質>
  - $\text{メタ性質} \Rightarrow \{M \text{ s.t. } [M.\text{最可変}: M], \text{そして}, [M.\text{最可変}: M.\text{全余}]\}$
  - その性質を満たすものの中では最も可変(曖昧)である
- **最不変性質**(または、単に**最不変**) : attr<メタ性質  $\mapsto$  性質>
  - $\text{メタ性質} \Rightarrow \{M \text{ s.t. } [M.\text{最不変}: M], \text{そして}, [M.\text{最不変}: M.\text{全含}]\}$
  - その性質を満たすものの中では最も不変(具体的)である

# 分類の公理

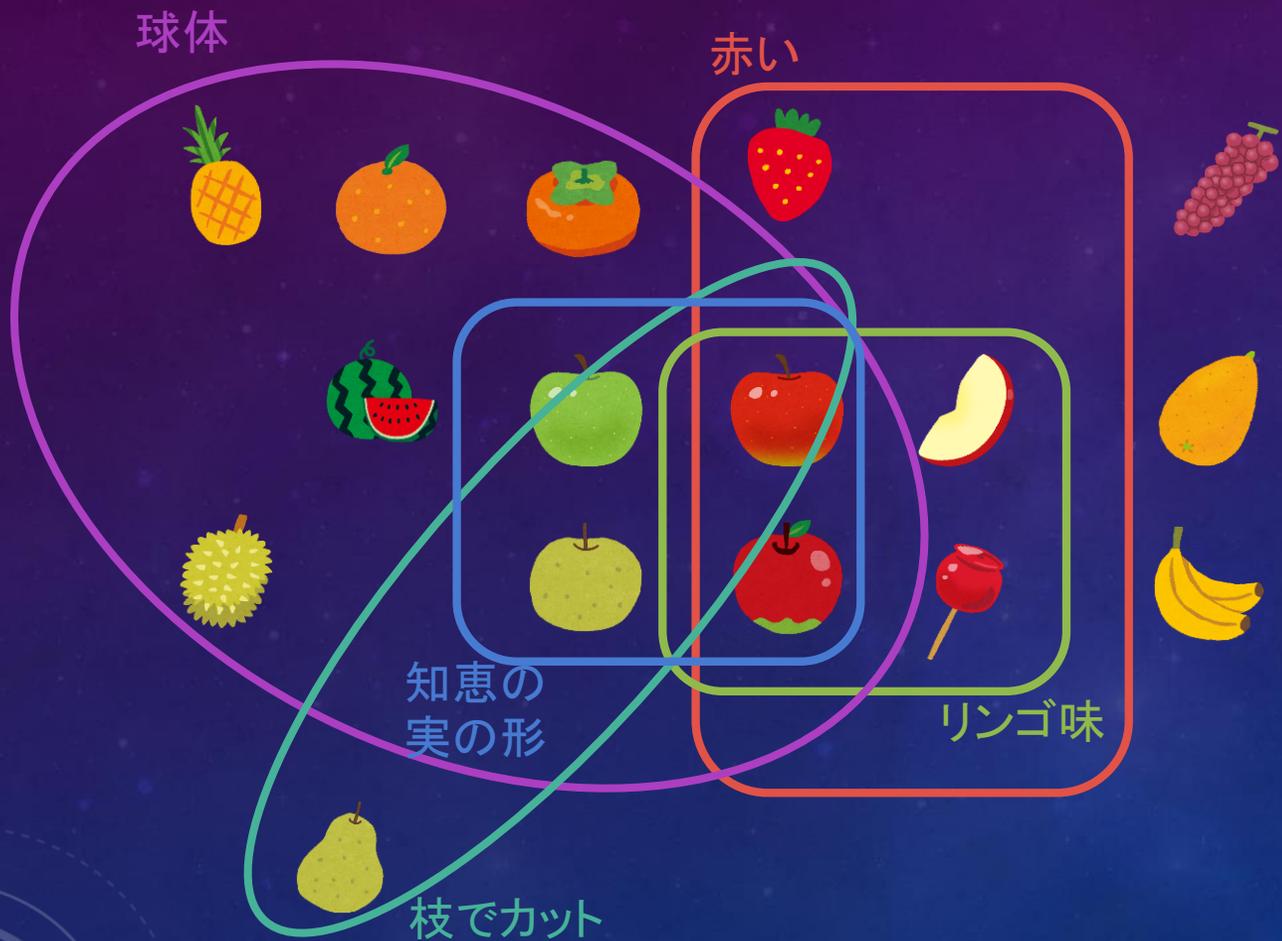
- $a$ をモノ、 $\varphi$ をパッケージとする。
- **充足** :  $\text{attr}\langle(\text{モノ}, \text{パッケージ}) \mapsto \text{メタ性質}\rangle$ 
  - $(a, \varphi).\text{充足} = \{X \text{ s.t. } \varphi \models [a : X]\}$
- 分類の公理
  - $a@_{\varphi} = (a, \varphi).\text{充足}.\text{全含}.\text{最可変}$
  - 特に、 $[a@_{\varphi} : (a, \varphi).\text{充足}.\text{全含}]$ であることを内包公理とよぶ。
- 定義の中に分類を使っている、循環した定義
  - メタパッケージでの分類で、証明の上では問題にならない

$\mathcal{M} = (\text{お母さん}, \text{🍎}). \text{充足}$

[赤い:  $\mathcal{M}$ ],

[球体:  $\mathcal{M}$ ],

...



$\mathcal{M}$ . 全含



$\mathcal{M}$ . 全含. 最可変

# パッケージと情報の公理

- $x, y$ をモノ、 $\varphi, \psi$ をパッケージとする。
- そのパッケージで強制している情報のみで、受容する内容がすべて決まる
  - インポートの公理... $\varphi \subset \psi = (\{A \text{ s.t. } \varphi \Vdash A\} \Rightarrow \{A \text{ s.t. } \psi \Vdash A\})$
  - パッケージの一致性... $\varphi \subset \psi$ 、そして、 $\psi \subset \varphi$ 、ならば、 $\varphi = \psi$
- 強制することは受容する
  - 初期化公理... $\{A \text{ s.t. } \varphi \Vdash A\} \Rightarrow \{A \text{ s.t. } \varphi \Vdash A\}$
- 2つのモノがどんな視点でも同じ情報をもつとき、同一とみなす
  - **形容** :  $\text{attr} \langle \text{モノ} \mapsto \$(\text{パッケージ}, \text{性質}) \rangle \dots a.\text{形容} = \{(\varphi, X) \text{ s.t. } \varphi \Vdash [a : X]\}$ とする。
  - モノの一致性... $x=y$ は、 $x.\text{形容} \Leftrightarrow y.\text{形容}$ 、に同値。特に、 $x=y$ 、ならば、 $(x, \varphi).\text{充足} \Leftrightarrow (y, \varphi).\text{充足}$

# この章のまとめ

- 結論の一致する妥当な推件を提示し、主張を証明する
  - 色々な推論規則を許容するため、どんな推件が妥当であるかは一般には与えない
  - 協調型論理では、含意推件の1種類だけで事足りる
  - 含意は「性質含意」として定義する。情報の含意は、性質含意を使って表現する。
- 性質含意を使って、公理を規定できる
  - 全含/全余/最可変/最不変といったメタ性質に関する帰属
  - 分類公理
  - パッケージと情報の公理
- 続く章では、集大成として、協調型論理の中で従来の論理を表現する

# 協調型論理の定理

直観主義論理の自然演繹規則を証明することをはじめとし、従来の論理学を協調型論理において解釈することを通して、協調型論理が備える性質を紹介する。

# 性質積と性質和

- **性質積**(または単に**積**) : attr<メタ性質  $\mapsto$  性質>
  - $\mathcal{M}$ をメタ性質とする。 $\mathcal{M}$ .積 =  $\mathcal{M}$ .全含.最可変
- **性質和**(または単に**和**) : attr<メタ性質  $\mapsto$  性質>
  - $\mathcal{M}$ をメタ性質とする。 $\mathcal{M}$ .和 =  $\mathcal{M}$ .全余.最不変
- 組(X, Y)の全体をメタ性質として使う場合、**2項積**および**2項和**とよぶ
  - $\forall (X, Y)$ .積のことを、 **$X \cap Y$** と書く
  - $\forall (X, Y)$ .和のことを、 **$X \cup Y$** と書く。
- A, Bを情報とする。 $\varphi \models A$ 、そして、 $\varphi \models B$ である
  - $[\varphi : \{\psi \text{ s.t. } \psi \models A\} \cap \{\psi \text{ s.t. } \psi \models B\}]$ のことを表す

# 相反と性質否定

- **空**( $\emptyset$ と書く) : 性質
  - あるモノ $x$ に対し、 $\phi \models [x : \emptyset]$ のとき、 $\phi$ は**矛盾する**と言ひ、「 $\phi \models \perp$ 」と書く。
  - 通常、 $\phi$ は矛盾しないパッケージであると言及なしに仮定する。言及する場合、「 $\phi \neq \perp$ 」と書く。
  - $\emptyset = \text{性質.最不変}$
- **相反** :  $\text{attr}\langle \text{性質} \mapsto \text{メタ性質} \rangle$ 
  - $X.\text{相反} = \{Y \text{ s.t. } X \cap Y = \emptyset\}$
- **性質否定**(または単に**否定**) :  $\text{attr}\langle \text{性質} \mapsto \text{性質} \rangle$ 
  - $X.\text{否定} = X.\text{相反}.\text{最可変}$
  - **$!X$** と書く。

# 定義まとめ

名称	定義式 (X, Yは性質)	補足
内包公理	$\$(モノ, パッケージ) \Rightarrow \{(a, \varphi) \text{ s.t. } [a@{\varphi} : (a, \varphi).内包]\}$	$(a, \varphi).内包 = (a, \varphi).充足.全含$
分類の最可変性	$\$(モノ, パッケージ) \Rightarrow \{(a, \varphi) \text{ s.t. } (a, \varphi).内包 \Rightarrow a@{\varphi}\}$	
積の全含性	$[X \cap Y : \forall (X, Y).全含]$	$X \cap Y \Rightarrow X$ 、そして、 $X \cap Y \Rightarrow Y$
積の最可変性	$\forall (X, Y).全含 \Rightarrow \{Z \text{ s.t. } Z \Rightarrow X \cap Y\}$	
和の全余性	$[X \cup Y : \forall (X, Y).全余]$	$X \Rightarrow X \cup Y$ 、そして、 $Y \Rightarrow X \cup Y$
和の最不変性	$\forall (X, Y).全余 \Rightarrow \{Z \text{ s.t. } X \cup Y \Rightarrow Z\}$	
否定の相反性	$[!X : X.相反]$	$!X \cap X \Rightarrow \emptyset$
否定の最可変性	$X.相反 \Rightarrow \{Z \text{ s.t. } Z \Rightarrow !X\}$	
爆発律	$\emptyset \Rightarrow X$	$\emptyset = \text{性質.最不変より成り立つ}$

# 命題との対応

- 命題は「パッケージが情報を受容するかどうか」を表すパッケージ性質とみなす
  - $\{\varphi \text{ s.t. } \varphi \models A\}$ のことを「 $\models A$ 」と書く。
  - 強制と受容を区別しない... $\models A = \{\varphi \text{ s.t. } \varphi \Vdash A\}$
- 恒真 : subc<情報>
  - 矛盾の無いパッケージはすべてその情報を満たす
  - 恒真 =  $\{A \text{ s.t. } \not\models \perp \Rightarrow \models A\}$
- $\varphi$ をパッケージ、 $A$ を情報とする。 $\varphi$ に情報 $A$ を加えることを考える
  - 付加 :  $\text{attr}\langle \$(\text{パッケージ}, \text{情報}) \mapsto \text{パッケージ性質} \rangle \dots (\varphi, A). \text{付加} \Rightarrow \{\psi \text{ s.t. } \varphi \subset \psi \wedge \psi \models A\}$
  - $(\varphi, A). \text{付加}$ .最小を、「 $\varphi + A$ 」と書く。すなわち、 $[\varphi + A : (\varphi, A). \text{付加}]$ 、そして、 $(\varphi, A). \text{付加} \Rightarrow \{\psi \text{ s.t. } \varphi + A \subset \psi\}$

# 命題論理との対応表

$\alpha, \beta$ は論理式、 $\Gamma$ は論理式の集合	$A, B$ は情報、 $\gamma$ はパッケージ
$\alpha$	$\models A$
$\alpha \rightarrow \beta$	$\{\varphi \text{ s.t. } (\varphi, A). \text{付加} \Rightarrow \models B\}$
$\alpha \wedge \beta$	$\models A \cap \models B$
$\alpha \vee \beta$	$\models A \cup \models B$
$\neg \alpha$	$!(\models A)$
$\gamma \vdash \perp$	$\exists \text{ノ} \Rightarrow \{x \text{ s.t. } \gamma \models [x : \emptyset]\}$
$\Gamma \vdash \alpha$	$\gamma \models A$
$\alpha \in \Gamma$	$\gamma \Vdash A (\Leftrightarrow \gamma \models A)$
$\{\Gamma, \alpha\}$	$\gamma \vdash A$

# 自然演繹との対応表

自然演繹の推論規則	協調型論理における定理	定理を導く公理(定義)
$\Gamma \vdash \phi, \Gamma \vdash \psi$ ( $\wedge I$ ) $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$	$\{\gamma \text{ s.t. } \gamma \models A, \text{そして、} \gamma \models B\} \Rightarrow \models A \wedge \models B$	積の最可変性
$\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$ ( $\wedge E$ ) $\Gamma \vdash \phi$	$\models A \wedge \models B \Rightarrow \models A$	積の全含性
$\Gamma \vdash \phi$ ( $\vee I$ ) $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$	$\models A \Rightarrow \models A \vee \models B$	和の全余性
$\Gamma \vdash \phi \vee \psi, \{\Gamma, \phi\} \vdash \xi, \{\Gamma, \psi\} \vdash \xi$ ( $\vee E$ ) $\Gamma \vdash \xi$	$\{\gamma \text{ s.t. } [\gamma : \models A \vee \models B], \text{そして、} \gamma \vdash A \models C, \text{そして、} \gamma \vdash B \models C\} \Rightarrow \models C$	和の最不変性
$\{\Gamma, \phi\} \vdash \psi$ ( $\rightarrow I$ ) $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$	$\{\gamma \text{ s.t. } \gamma \vdash A \models B\} \Rightarrow \{\phi \text{ s.t. } (\phi, A). \text{付加} \Rightarrow \models B\}$	インポートの公理
$\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi, \Gamma \vdash \phi$ ( $\rightarrow E$ ) $\Gamma \vdash \psi$	$\{\gamma \text{ s.t. } (\gamma, A). \text{付加} \Rightarrow \models B, \text{そして、} \gamma \models A\} \Rightarrow \models B$	パッケージの一致性
$\Gamma \vdash \perp$ ( $\perp$ ) $\Gamma \vdash \phi$	$\models \perp \Rightarrow \models A$	爆発律
$\{\Gamma, \phi\} \vdash \perp$ ( $\neg I$ ) $\Gamma \vdash \neg \phi$	$\{\gamma \text{ s.t. } \gamma \vdash A \models \perp\} \Rightarrow \neg(\models A)$	否定の最可変性
$\Gamma \vdash \phi, \Gamma \vdash \neg \phi$ ( $\neg E$ ) $\Gamma \vdash \perp$	$\{\gamma \text{ s.t. } \gamma \models A, \text{そして、} [\gamma : \neg \models A]\} \Rightarrow \models \perp$	否定の相反性

# 2つの否定

- $\varphi \models [a : !X]$ 
  - $a$ のすべての可変性が、 $X$ 否定となることを主張する、強い情報
- $\varphi \not\models [a : X]$ 
  - 情報 $A$ に対し、 $\varphi \not\models A \Leftrightarrow [\varphi : !\models A]$
  - $a$ のすべての可変性が $X$ となる訳ではないと主張する、弱い情報 ( $\varphi \models [a : !X]$ 、ならば、 $\varphi \not\models [a : X]$ )
  - 同時に $\varphi \not\models [a : !X]$ も $\varphi'$ が受容する可能性がある(もちろん、 $\varphi \models [a : !X]$ の可能性もある)
- 3つの二重否定
  - $\varphi \models [a : !!X]$
  - $\varphi \not\models [a : !X]$
  - $[\varphi : !!\models [a : X]]$

# 背理法の妥当性

- (性質Xに対する)背理法公理
  - $\varphi \neq [a : !X]$ 、ならば、 $\varphi \models [a : X]$
  - aおよびXの意味が固定化されており、 $[a : X]$ か $[a : !X]$ のどちらかが必ず成り立つことを表している
- 二重否定除去定理
  - 背理法公理のもとで、 $!!\models [a : X] \Rightarrow \models [a : X]$
  - 命題 $\alpha$ に対し、 $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ が恒真に対応
  - 背理法公理と同値
- 背理法公理を仮定すると、 $\varphi \models [a : !!X]$ 、ならば、 $\varphi \models [a : X]$  (弱い二重否定除去)
- **すべての性質に対して背理法を仮定するパッケージは矛盾する(ラッセルの逆理定理)**

# 多値性の実現

- **確信度** : class
  - **高い** :  $\text{subc}\langle\$(確信度, 確信度)\rangle\dots[(x, y) : \text{高い}]$ を $x \geq y$ と書く。
  - **最高確信度** :  $\text{subc}\langle確信度\rangle\dots\text{最高確信度} \Rightarrow \{x \text{ s.t. } 確信度 \Rightarrow \{y \text{ s.t. } x \geq y\}\}$
- **信用** :  $\text{attr}\langle確信度 \mapsto \text{subc}\langle\$(パッケージ, 情報)\rangle\rangle$
- **公理の例**
  - [最高確信度 : 定数]および[最低確信度 : 定数]
  - $\text{最高確信度.信用} \Leftrightarrow \{(\varphi, A) \text{ s.t. } \varphi \models A\}$
  - $x, y$ を確信度で、 $x \geq y$ とするとき、 $x.\text{信用} \Rightarrow y.\text{信用}$
  - ...

# 矛盾許容性の実現

- 3つの矛盾許容
  - 爆発律を公理に加えない
  - 「 $X \cap !X$ 」を $\emptyset$ でないと考える
  - (文字通り)矛盾することを受容する
- 爆発律...性質  $\Rightarrow \{X \text{ s.t. } \emptyset \Rightarrow X\}$ 
  - $\varphi \models \perp$ 、すなわち、ある $a$ に対して $\varphi \models [a : \emptyset]$ ならば、任意の性質 $X$ に対し、 $\varphi \models [a : X]$
  - モノ $b$ に対し、性質 $E(b) = \text{「}b\text{に等しい」}$ とし、 $\varphi \models [a : E(b)]$ 、すると、 $\varphi \models [b : \emptyset]$
  - すなわち、全てのモノに対し、あらゆる性質を満たす情報を $\varphi$ が受容する
- 協調型論理では、 $\varphi$ が**矛盾しても $\varphi$ 上にはないパッケージで情報を導けない**。この意味で矛盾を許容する

# この章のまとめ

- 直観主義論理の量化を除く自然演繹規則について、協調型論理での一つの解釈を与えられる
  - 命題は「パッケージが情報を受容するかどうか」を表すパッケージ性質とみなせる
  - 性質に対する積/和/否定の定義から、演繹規則が証明できる
- 直観主義論理をベースとして、ほかの従来の論理に対する解釈を与えられる
  - 背理法公理の妥当性
  - 多値性の実現
  - 爆発律を備えた矛盾許容
- 従来の代表的な論理を含む、様々な論理を協調型論理の中で取り扱い可能なことを確認できた
  - 目的を達成した

おわりに



# 本発表のまとめ

- 共存性と自己定義性を備える「協調型論理」を考案
  - メタ情報に着目した、クリプキフレームの拡張により実現
  - モノ、性質、帰属の3種類から情報を構成
  - 内包公理により、すべての概念に意味付け可能
  - 曖昧な視点(極大でない視点)を許容することにより、ラッセルの逆理を受容する
- 協調型論理における証明方法を提示
  - 含意推件の一種類のみですべての情報の妥当性を主張可能
- 従来の代表的な論理を含む、様々な論理を協調型論理の中で取り扱い可能なことを確認できた
  - 目的達成:従来のどの論理も肯定しつつ、それらの結果を統合する基盤としての論理を実現

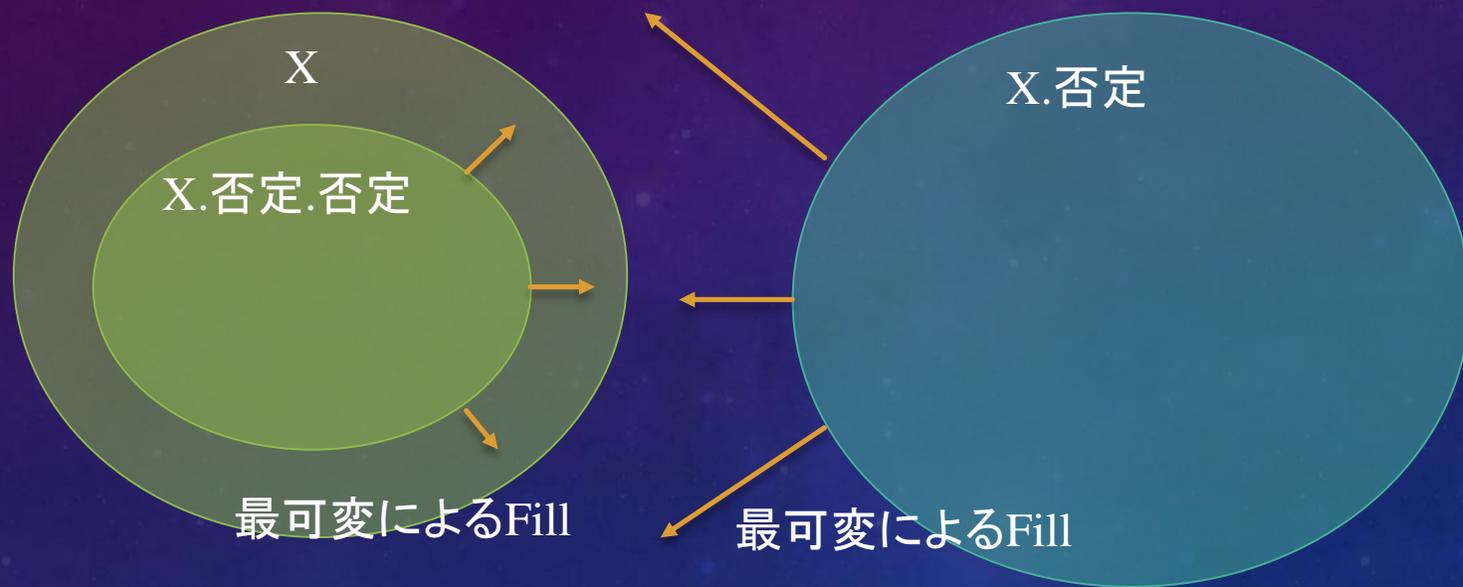
**ご清聴ありがとうございました!**  
Thank you for your attention!

# 定理の証明



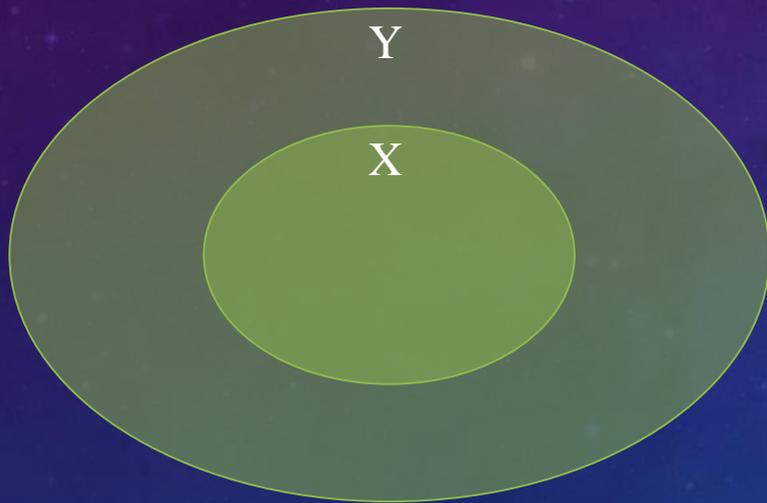
# 二重否定定理

- 相反の対称性 :  $(Y, X.\text{相反}).\text{成立}$ 、ならば、 $(X, Y.\text{相反}).\text{成立}$
- 証明:  $X \Rightarrow !!X$ 
  - 否定の定義より、 $(!X, X.\text{相反}).\text{成立}$
  - 相反の対称性より、 $(X, !X.\text{相反}).\text{成立}$
  - $!!X=!X.\text{相反}$ 、最可変で、最可変の定義より、 $X \Rightarrow !!X$



# 相反の基本定理

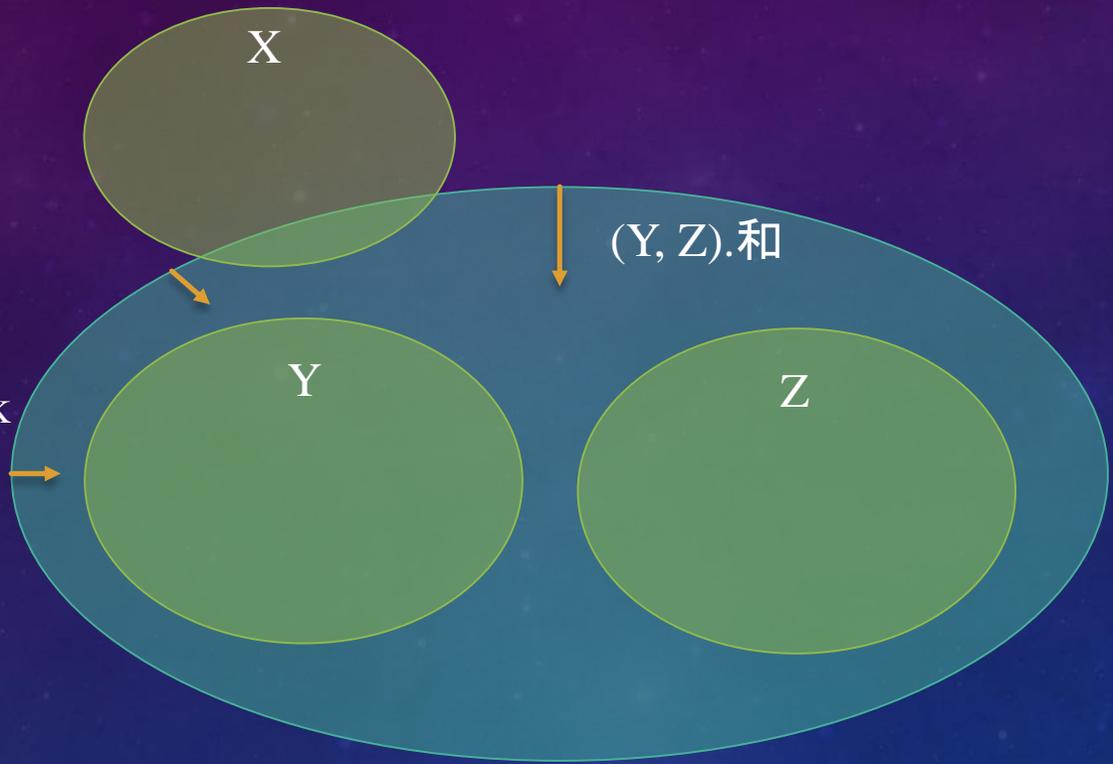
- $X \Rightarrow Y$ 、そして、 $(Y, Z)$ 相反).成立、ならば、 $(X, Z)$ 相反).成立
  - $(x, X \cap Z)$ .成立とする。
  - $X \Rightarrow Y$ 、より、 $([x : X], Y)$ .成立、すると、 $(E(x) = X \cap Z, (Y, Z))$ .両立).成立
  - 積の最可変性より、 $X \cap Z \Rightarrow Y \cap Z$
  - $(Y, Z)$ 相反).成立、より、 $X \cap Z \Rightarrow \emptyset$ 、すなわち、 $(X, Z)$ 相反).成立
- 応用例
  - $X \Rightarrow XUY$ だから、 $(XUY, Z)$ 相反).成立、ならば、 $(X, Z)$ 相反).成立、同様に $(Y, Z)$ 相反).成立



# 相反の和の補題

- 補題:  $(Y, X \text{ 相反})$ . 成立、そして、 $(Z, X \text{ 相反})$ . 成立のとき、 $(YUZ, X \text{ 相反})$ . 成立
  - 否定の最可変性より、 $Y \Rightarrow !X$ 、そして、 $Z \Rightarrow !X$
  - よって、 $(!X, (Y, Z))$ . 選択). 成立
  - 和の最不変性より、 $YUZ \Rightarrow !X$
  - $(!X, X \text{ 相反})$ . 成立で相反の基本定理より、 $(YUZ, X \text{ 相反})$ . 成立

最不変によるShrink



(Y, Z).和

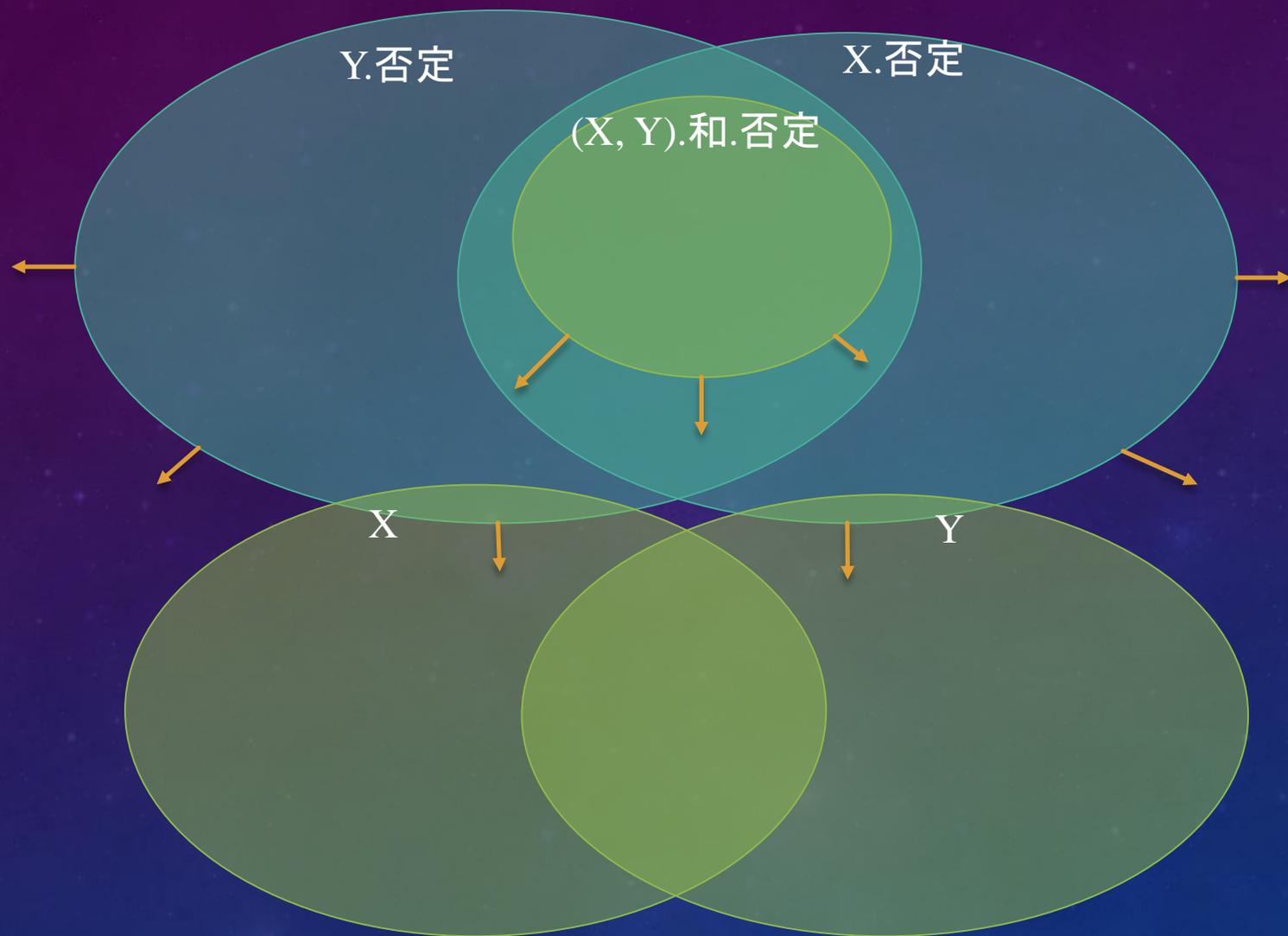
X

Y

Z

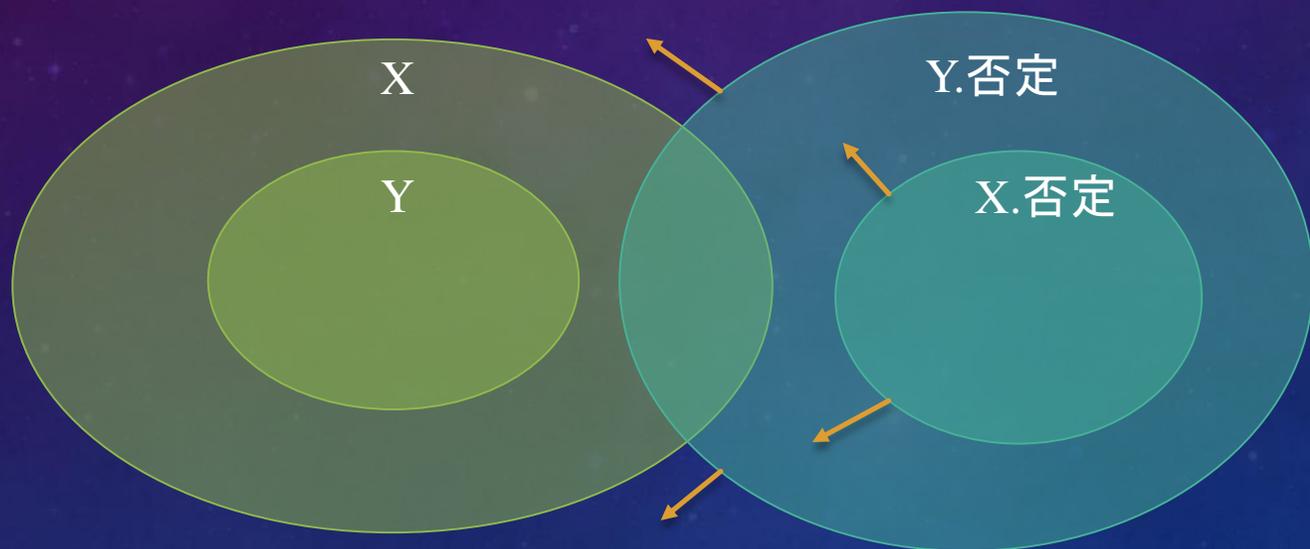
# ド・モルガンの定理

- 証明① :  $!(XUY) \Rightarrow !X \cap !Y$ 
  - $(!(XUY), (XUY).相反).成立$ 、ゆえに、相反の基本定理から、
    - $(!(XUY), X.相反).成立$ 、さらに、 $!(XUY) \Rightarrow !X$
    - $(!(XUY), Y.相反).成立$ 、さらに、 $!(XUY) \Rightarrow !Y$
- 証明② :  $!X \cap !Y \Rightarrow !(XUY)$ 
  - 積の定義から、 $!X \cap !Y \Rightarrow !X$
  - 否定の定義から、 $(!X, X.相反).成立$ 、よって、相反の基本定理から、 $(!X \cap !Y, X.相反).成立$
  - 同様に、 $(!X \cap !Y, Y.相反).成立$
  - 相反の和の補題から、 $(!X \cap !Y, XUY.相反).成立$



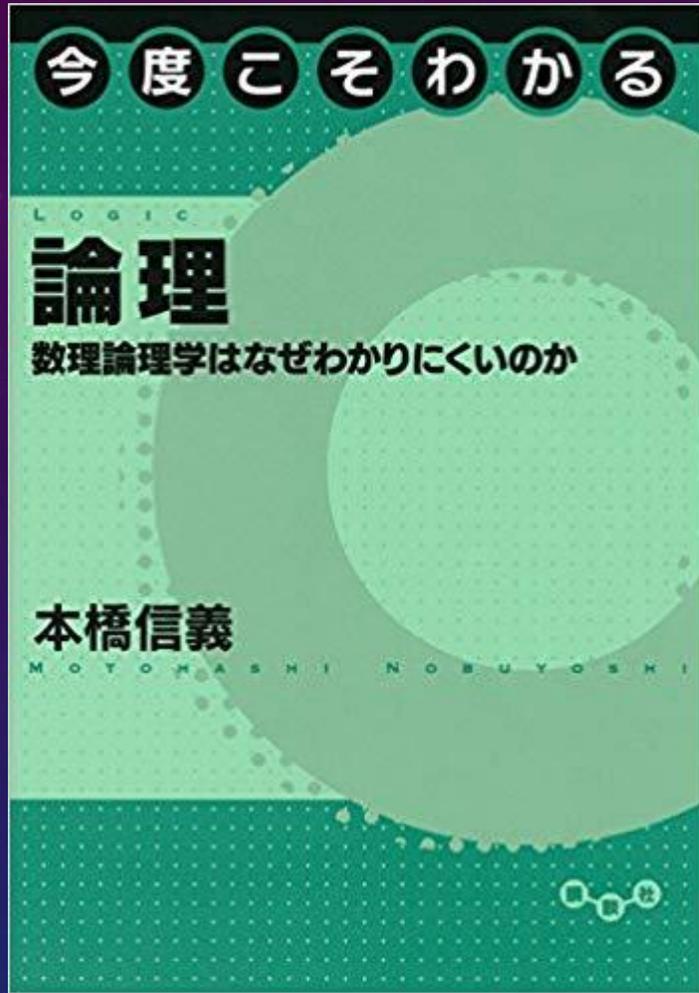
# 対偶定理

- $X \Rightarrow Y$ 、ならば、 $!Y \Rightarrow !X$ 
  - $(!Y, Y)$ .相反).成立、相反の基本定理より、 $(!Y, X)$ .相反).成立
  - 否定の最可変性より、 $!Y \Rightarrow !X$
- $X \Rightarrow !Y$ 、ならば、 $Y \Rightarrow !X$ 
  - $\varphi^\perp \Vdash [x : Y \cap X]$ 、とする
  - $\varphi^\perp \Vdash ([x : X], !Y)$ .成立、すると、 $\varphi^\perp \Vdash [E(x) : (Y, !Y)$ .両立]、となる。
  - これは、 $\varphi^\perp \Vdash E(x) \Rightarrow Y \cap !Y$ 、から、 $\varphi^\perp \Vdash E(x) \Rightarrow \emptyset$ であり、 $\varphi^\perp \Vdash (x, \emptyset)$ .成立
  - 以上より、 $Y \cap X \Rightarrow \emptyset$ 。したがって、 $(Y, X)$ .相反).成立



# 参考文献

The background is a dark blue gradient with a field of small white stars. On the right side, there are several technical diagrams. At the top right, there is a circular scale with numerical markings from 80 to 210 and a dashed line with an arrowhead. Below it is another circular diagram with concentric circles and arrows. At the bottom right, there is a diagram with dashed circles and arrows. On the left side, there are also some faint circular diagrams.



今度こそわかる論理 数理論理学はなぜわかりにくいのか  
(今度こそわかるシリーズ)

本橋 信義 (著)

講談社

2014年



ロジックの世界 論理学の哲人たちがあなたの思考を変える  
(ブルーバックス)

ダン・クラリアン (著), シャロン・シュアティル (著)

田中一之 (翻訳)

講談社

2015年

(原著は"INTRODUCING LOGIC" 2012年 Icon Books)

# Wikipediaでの参照ページ(ページ名)

- Formal system, Informal logic
- Positivism, Willard Van Orman Quine
- Intuitionistic logic
- Many-valued logic
- Paraconsistent logic
- Relevance logic
- Modal logic
- Kripke semantics
- Rudolf Carnap
- Gottfried Wilhelm Leibniz
- Sequent calculus, Natural deduction

補足



# アブストラクト

- カルナップの寛容の原理にしたがい今日様々な論理が共存している。
- これらの論理を協調的に扱う手立てとして協調型論理を考案する。
- 協調型論理は、クリプキノードに成立する強制関連式を再帰的に論理式として扱う形でクリプキフレームを拡張し実現される。
- この論理における論理式の構成は述語論理とよく似た形だが、公理的集合論とは対照的に内包公理を使って構成される。
- 本講演では、協調型論理の考案の背景および構成方法を説明する。
- 時間が許せば、従来の論理をどのように取り扱えるのかを考察し、この論理の有用性について議論したい。

# Abstract

- Today, there co-exist various logics according to Carnap's principle of tolerance.
- I introduce “Cooperative Logic (CooL)” which helps us to treat these logics cooperatively.
- CooL is conceived as an extension of Kripke frame that regards the formulas between Kripke node and forcing relation as also formulas recursively.
- The formulas in this logic have a similar form to predicate logic, but they are based on “axiom of unrestricted comprehension” in contrast to axiomatic set theories.
- In this talk, we discuss the context of CooL and its construction.
- If time allows, we consider how to treat formal logics in CooL, and deepen discussion for its utility.

# 本発表の興味所

- 「数理論理の人は何にでも先頭に“任意の”を付けたがる」
  - 数学基礎論サマースクール2019...菊池先生のご講演より
- 定数とは何か。定数も変化するのなぜか
- 「すべての」と「任意の」の違いは何か
- 公理 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ はどのような意味か
- ラッセルの逆理に納得できない

# 量子論理

- パトナム
- 命題論理をブール代数と捉えたとき、分配則が成り立たない論理
- 定義は形式的
- 意味は実証的

# メタパッケージ $\varphi'$

- パッケージ $\varphi$ のことを言及したい場合に便宜上使うパッケージ
  - $\varphi$ の中で言及すると $\varphi$ の情報が増えてしまうので困る
- $\varphi \subset \varphi'$ かつ、 $\varphi' \neq \varphi$ であるとみなす

# 公理視点パッケージ $\Omega$

- すべてのパッケージで特定情報を強制または受容することを強制できない
  - してもよいが、すべてのパッケージが実際にそれを受容するとは限らない
  - 万人が認める公理はない。公理は断らなければいけない
- 協調型論理で認める公理を規定するパッケージ $\Omega$ 
  - $\Omega \Vdash (\varphi \models A \text{ s.t. } \varphi \Vdash A)$
  - 協調型論理に則る視点のパッケージ $\varphi$ はすべて $\Omega$ をインポートしているとみなす

# 外延の内包による定義

- メタ性質を定義するための帰属
  - 充足 :  $\text{attr}\langle \text{モノ} \mapsto \text{メタ性質} \rangle$
  - $[X : x.\text{充足}]$ は、「性質Xは、xによって満たされる」という情報を表す
- 充足は内包によって規定される
  - $x.\text{充足} = \{X \text{ s.t. } [x : X]\}$
- 「それ以外では満たされない」を表現する
  - $[a : X]$ 、ならば、 $a=x_1$ 、または、...、または、 $a=x_n$

# 性質の後付け

- パッケージ $\psi$ を $\varphi \subset \psi$ とする。
- 後付け1: モノ $x$ に対する性質 $X$ で、 $\psi \Vdash [x : X]$ 
  - $x$ と $x@_x\psi$ を変化させるが、 $x@_x\varphi$ を変化させない
  - $\psi$ は $\varphi$ と同列な視点
- 後付け2: 性質に対する性質 $\mathcal{P}$ で、 $\psi \Vdash [x@_x\varphi : \mathcal{P}]$ 
  - $x$ を変えないが $x@_x\varphi$ を変化させる
  - $\psi$ は $\varphi$ よりメタな視点

# 同一視

- 一致性(=): すべての性質がともに成り立つ、と定義 (不可識別者同一の原理; Leibniz's law)
  - 一致性を定めるとは、すべての取り得る性質を定めることに該当。クラスの性質を完全に決定する
- 同一視(または、埋め込みとも):  $\text{subc}\langle\text{帰属}\rangle$
- 帰属 $\mathcal{A}$ が以下の条件を満たすとき、 $\mathcal{A}$ は同一視であるという
  - $x.\mathcal{A} = y.\mathcal{A}$ 、ならば、 $x = y$
  - =の定義から、逆は当然成り立つ
  - 帰属先に、帰属元で考えうるすべての性質を取り入れるだけの余地がある

# 変数と定数

- すべての数学的対象物は可変性をもつ
  - この意味で変数となる
- 定数も数学的対象物であり可変性をもつが、ある種の相対的非可変性をもつ
  - 定数条件 :  $\text{subc}\langle \text{性質} \rangle$
  - $[X : \text{定数条件}]$ は、「 $[x : X]$ 、そして、 $[y : X]$ 、ならば、 $x = y$ 」
  - さらにモノ $z$ を分類して $[z@φ : \text{定数条件}]$ 、ならば、 $z$ を「定数」とよぶ
- 例: 太郎を人クラスの定数とする
  - $x$ および $y$ が「太郎である」という性質で制約された変数であれば、 $x = y$
  - このとき、「太郎である」性質の代表変数を「太郎」と書く

# 推論と推件

- 推件 : class
  - 結論 : attr<推件  $\mapsto$  情報>
  - 妥当 : attr<パッケージ  $\mapsto$  推件性質>
  - 何が妥当なのかは一般に定義されない。個別(推件の導出方法ごと)に定義する。
- 推論 : attr<パッケージ  $\mapsto$  情報性質>
  - パッケージ $\varphi$ に対し、情報Aが $\varphi$ .推論であるとは、結論がAと一致し、かつ、 $\varphi$ .妥当な推件が存在すること
  - $[A : \varphi.\text{推論}] = \exists \{R \text{ s.t. } R.\text{結論} = A, \text{そして、}[R : \varphi.\text{妥当}]\}$

# カリーのパラドックス

- レープのパラドックスとも
- 例:この文が真なら、サンタクロースは実在する。
  - この文が真→この文が真なのでサンタクロースは実在する
  - この文が偽→「AならばB」の否定は、AでないがB→サンタクロースは実在する
- 酒場の法則に類似
- 協調型論理での取り扱い
  - 情報A=「Aを受容するパッケージ ⇒ サンタクロースを受容するパッケージ」
  - サンタクロースを受容しないパッケージが矛盾しないならば、Aを受容しない、というだけ。

# 床屋のパラドックス

- 規則: ある村でたった一人の床屋(男性とする。)は、自分で髭を剃らない人全員の髭を剃り、それ以外の人の髭は剃らない。
- 問題: 床屋自身の髭は誰が剃るのか?
  - 床屋が自分の髭を剃らなければ、彼は「自分で髭を剃らない人」に属するので、床屋は自分自身の髭を自分で剃らなくてはいけなくなり、矛盾が生じる。
  - 床屋が自分の髭を剃るならば、「それ以外の人の髭は剃らない」という規則に矛盾する。
- 解釈:
  - その1: 時制についての言及を巧妙に隠している(「剃ったことがある」と「これから剃る」)
  - その2: 「自分で剃る」と「職業的に剃る」を区別し、床屋自身はどちらか一方で剃っている
- 協調型論理は解釈その2で、自分で剃るの意味合いを分類した後に、職業的に剃るの意味合いで情報付けしようとすると言及している。

# 協調型論理における推論

- 論証は「結論となる情報を強制なしに主張すること」
- 推理は「受容されている情報から、受容されていない情報を導き出すこと」
- 証明された結論を使うことは「論証の結論である情報を受容すること」
  - 証明を受容しなくても、結論を受容することはできる
- 推論の流れ
  - 情報Aを主張する
  - 主張が妥当であると主張する
  - その視点で既に受容されている情報に帰着させる

# 定義と主張

- 情報Aがパッケージ $\varphi$ の定義である、とは
  - その情報Aを強制する。 $\varphi \Vdash A$
  - $\varphi$ で正に(新たに)定義しているかはメタ視点での定義 $\varphi' \Vdash \varphi \Vdash A$  (定義を取り込んだ場合は $\varphi' \Vdash \varphi \Vdash A$ )
- 情報Aはパッケージ $\varphi$ の主張であるとは
  - その情報Aを定義なしに受容する。 $\varphi \Vdash A$ 、そして、 $\varphi \nVdash \neg A$
- 情報Aがパッケージ $\varphi$ で推論されるとは
  - 主張が妥当であると主張する
  - 推論 :  $\text{attr}\langle \text{パッケージ} \mapsto \text{情報性質} \rangle$
  - $\varphi' \Vdash [A : \varphi.\text{推論}]$

# 含意とは

- 2つの含意記号:  $\Rightarrow$ 、 $\rightarrow$ 
  - 「xはXである、ならば、xはYである」という形式に対し、xが性質Zであることを前提にする含意を「 $X \Rightarrow (Z)Y$ 」と書く。
  - 何に対しての含意なのかが重要。(しかし)文脈から分かるときは省略
- 例) どちらが不自然な含意か？
  - 「サーバルちゃんには耳がある」 $\Rightarrow$ 「サーバルちゃんは可愛い」
  - 「たかしくんはけものフレンズを見ていない」 $\rightarrow$ 「サーバルちゃんは可愛い」
- 論理式の含意  $\varphi \rightarrow \psi$  の意味
  - 「真偽値割り当て」に対しての含意、すなわち  $\rightarrow$  は「 $\Rightarrow$ (真偽値割り当て)」を表す
  - 論理式  $\varphi$  = 「たかしくんはけものフレンズを見ていない」、 $\psi$  = 「サーバルちゃんは可愛い」
  - $\varphi$  を満たす真偽値割り当て、ならば、すべて  $\psi$  を満たす。 $\psi$  が恒真式ならば  $\varphi$  の真偽は関係ない

# 含意形式

- ならば形式(then form)
  - 性質 $X$ 、 $Y$ に対し、 $X$ ならば $Y$
- だから形式(so form)
  - $\text{モノ}_x$ 、性質 $X$ 、 $Y$ に対し、 $x$ は $X$ 、だから $Y$
- もし形式(if form)
  - パッケージ $\varphi$ 、情報 $A$
  - もし $\varphi$ で情報 $A$ が成立するなら
  - $\varphi \subset \psi$ かつ $\psi \Vdash A$ なるパッケージ $\psi$
  - 性質 $X_\varphi = \lceil \psi \text{ s.t. } \varphi \subset \psi \text{ かつ } \psi \Vdash A \rceil$ 、 $Y = \lceil \psi \text{ s.t. } \psi \Vdash B \rceil$ とすると、ならば形式「 $X_\varphi$ ならば $Y$ 」を $\varphi'$ で作れる

# 含意推件の妥当性の直感的説明

- $\varphi \models [x : Y]$ の書き換え
  - $\varphi \models E(x) \Rightarrow Y$
- 推件  $\mathcal{S} = (x, Y, Z)$ . 導出  $= (E(x) \Rightarrow Y) \vdash (E(x) \Rightarrow Z)$ 
  - $[\mathcal{S} : \varphi. \text{妥当}] \Leftrightarrow \varphi \models Y \Rightarrow Z$ , そして、 $\varphi \models E(x) \Rightarrow Y$
- 性質  $X = E(x)$ とおくと
  - $X \Rightarrow Y$ , そして、 $Y \Rightarrow Z$ , ならば、 $X \Rightarrow Z$ が妥当

# 内包公理の証明プロセス

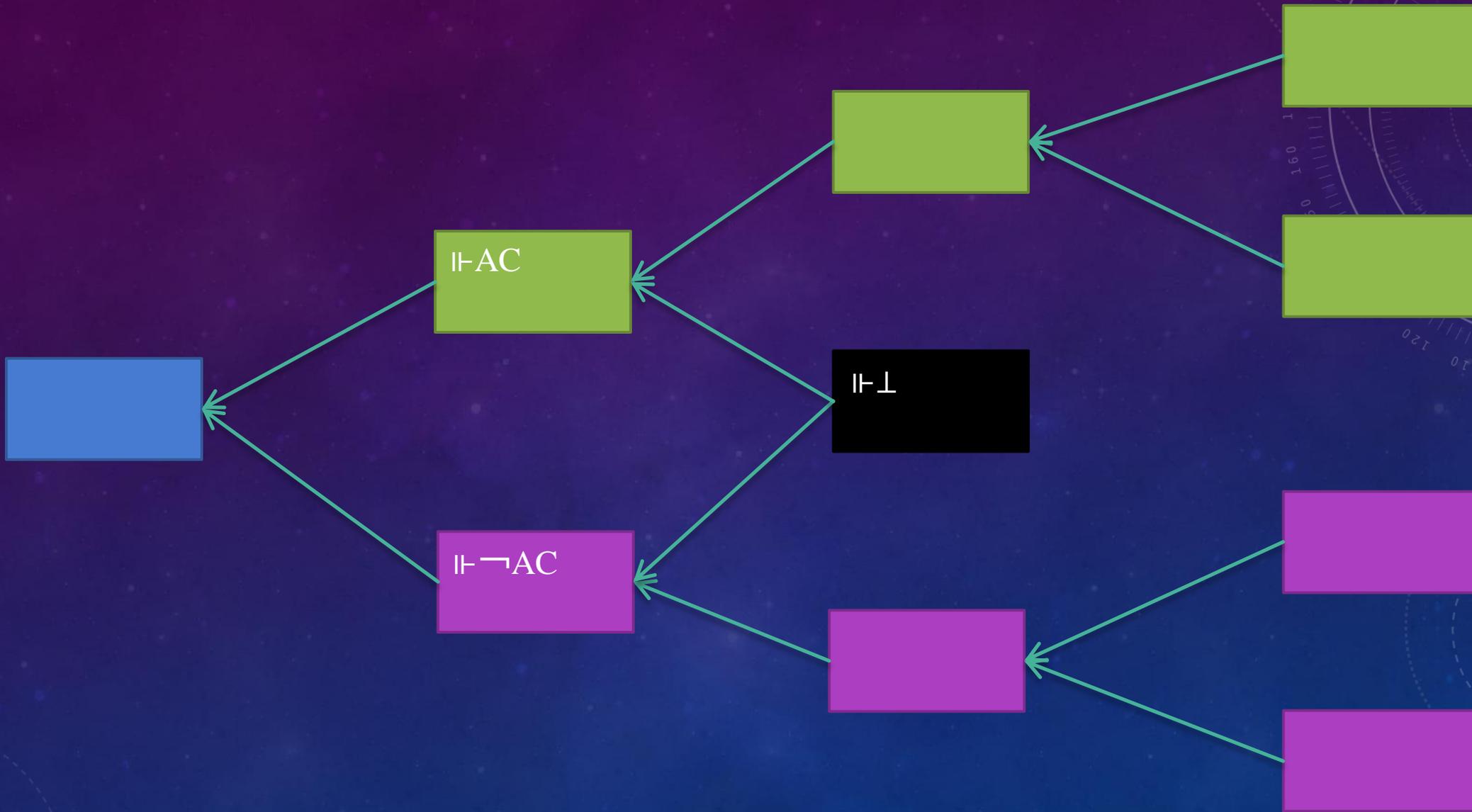
- 内包公理の書き下し

- $\$(モノ, パッケージ) \Rightarrow \{(a, \varphi) \text{ s.t. } \{X \text{ s.t. } \varphi \models [a : X]\} \Rightarrow \{Y \text{ s.t. } a @ \varphi \Rightarrow Y\}\}$
- $[x : a @ \varphi]$ とする。性質 $X$ が、 $\varphi \models [a : X]$ 、ならば、 $[x : X]$ 、の証明プロセスにあたる

$$\frac{\frac{[x : X]}{[x : a @ \varphi]} \quad \frac{a @ \varphi \Rightarrow X}{\varphi \models [a : X]}}{\frac{\{Y \text{ s.t. } \varphi \models [a : Y]\} \Rightarrow \{Z \text{ s.t. } a @ \varphi \Rightarrow Z\}}{[(a, \varphi) : \$(モノ, パッケージ)]}} \quad / \text{内包公理}$$

# ラッセルの逆理定理

- $\varphi \models [X : !X]$  とするとき、 $\mathcal{A}(\varphi) = X @ \varphi$
- 定理: いかなる矛盾しない  $\varphi$  上のパッケージ  $\psi$  も、 $\psi \not\models [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\varphi)]$ 
  - パッケージ  $\Rightarrow \{\varphi \text{ s.t. } \{\psi \text{ s.t. } \varphi \subset \psi, \text{ かつ、} \psi \not\models \perp\} \Rightarrow \not\models [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\varphi)]\}$
  - $\psi \not\models [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\varphi)]$  は、 $\psi \models [\mathcal{A}(\varphi) : !\mathcal{A}(\varphi)]$  を導かない
  - $\varphi$  が  $\mathcal{A}(\varphi)$  に対し背理法公理を仮定するパッケージの場合、 $\varphi \models [\mathcal{A}(\varphi) : !\mathcal{A}(\varphi)]$  を導く。すると、 $\varphi \models [\mathcal{A}(\varphi) : \mathcal{A}(\varphi)]$  を導き、 $\varphi \models \perp$
- 定理の示唆
  - すべての性質に対し背理法公理を仮定するパッケージは矛盾する
  - つまり、背理法公理の仮定は、 $\mathcal{A}(\varphi)$  のような曖昧さをもつ性質でないもの(※)だけに限定すべき(A翻訳)
  - ※例: 構成的集合論の集合に対応するような性質



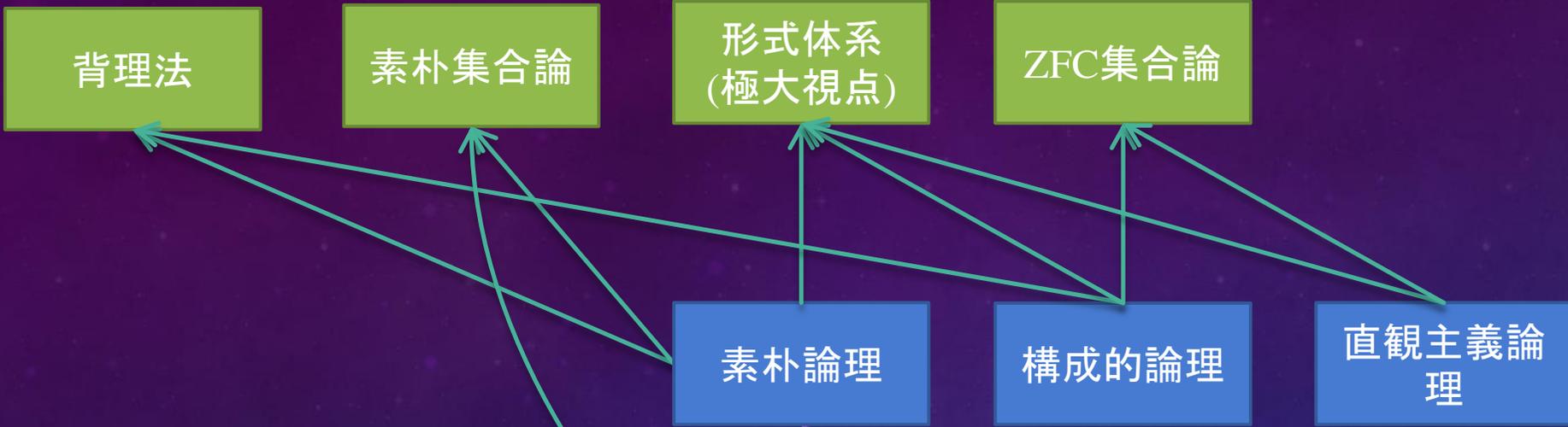
# 構成的集合論の概念の拡大



# 協調型論理の概念の拡大



時代



ラッセルの逆理

ZFC集合論によるラッセルの逆理の回避  
視点局所化によるラッセルの逆理の受容

協調型論理

- ①素朴論理...背理法・素朴集合論から形式体系による極大視点を作ろうという試み
- ②ラッセルの逆理により素朴論理が矛盾
- ③構成的論理...素朴集合論をZFC集合論に置き換えてラッセルの逆理を回避
- ④直観主義論理...背理法の排除という可能性
- ⑤協調型論理...視点局所化による矛盾許容の可能性

# 全称量化

- 「すべての」は有限を前提
  - 10以下の自然数のすべての和、は健全
  - 自然数のすべての和、は健全でない
- 「すべての」ならば「任意の」で言い換え可能。逆は成り立たない
  - 可変性がどれだけあるか分からなくても、「任意の」はサンプリングに対する主張なので言える

# 正規化公理

- 単一クラス公理:  $X, Y$  をクラス、 $x$  を  $X$  かつ  $Y$  であるモノとするとき、 $X=Y$

# 型

- 現在の議論の中で対象としたい性質に関する認識を表す概念
- パッケージ $\varphi$ でモノ $x$ が性質 $X$ を型としてもつ、とは
  - 情報 $[x : X]$ をモノと同一視する。型付きのモノを $[x]$ と書く