# トポス理論と圏論的論理学への誘い

### 荒武 永史

京都大学大学院理学研究科 数学·数理解析專攻 数理解析系 博士後期課程 3 回 (日本学術振興会特別研究員 DC.)

2019年12月6日 @数学基礎論若手の会2019 in 岡崎

#### Introduction

"A startling aspect of topos theory is that it unifies two seemingly wholly distinct mathematical subjects: on the one hand, topology and algebraic geometry, and on the other hand, logic and set theory."

> — Mac Lane & Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic 序文より

#### Contents

- 1 トポス理論入門:Grothendieck トポスと初等トポス
  - Grothendieck トポス
  - 初等トポス
- 2 Toposes as Mathematical Universes
  - トポスにおける一階論理の解釈
  - Kripke-Joyal 意味論と Sheaf Semantics
- 3 圏論的論理学と分類トポス
  - 函手的意味論
  - 一階理論の分類トポス

#### Contents of the Current Section

- 1 トポス理論入門:Grothendieck トポスと初等トポス
  - Grothendieck トポス
  - 初等トポス
- 2 Toposes as Mathematical Universes
  - トポスにおける一階論理の解釈
  - Kripke-Joyal 意味論と Sheaf Semantics
- 3 圏論的論理学と分類トポス
  - 函手的意味論
  - 一階理論の分類トポス

### 位相空間上の層

位相空間 X の開集合 U に対して、

$$\mathcal{F}(U) := \{ f \colon U \to \mathbb{R} ;$$
連続函数  $\}$ 

とおく。開集合  $V\subseteq U$  に対して、制限写像  $r_{UV}\colon \mathcal{F}(U)\to \mathcal{F}(V)$   $(f\mapsto f|_V)$  が定まる。よって、X の開集合系が成す半順序集合を  $\mathcal{O}(X)$  で表すとき、 $\mathbf{反変函手}\,\mathcal{F}\colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}\,$  が得られる。

さらに *F* は**貼り合わせ条件**という次の性質を持つ:

 $\forall U \in \mathcal{O}(X), \, \forall \{U_i\}_i \colon U \,$ の開被覆,  $\forall \{f_i\}_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$  に対し、 $\{f_i\}_i \, \, \text{が} \, i \neq j \implies f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  を満たすならば、 $\exists ! f \in \mathcal{F}(U), \, \forall i, \, f|_{U_i} = f_i$ 

このような性質を持つ反変函手  $\mathcal{F}$ :  $\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$  のことを、X 上の層という。層  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  に対して、自然変換  $\alpha$ :  $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$  を層の射という。X 上の層の圏を  $\mathbf{Sh}(X)$  で表す。

### サイトと Grothendieck トポス

Grothendieck は、数論幾何における新しいコホモロジー論を構築するために、 $\mathcal{O}(X)$  の代わりに圏  $\mathcal{C}$  上の層の概念を定義した。ここでは  $\mathcal{O}(X)$  の "開被覆" というデータに対応する、「 $\mathcal{C}$  の Grothendieck 被覆 J」というデータが与えられる。J は、各対象  $C \in \mathcal{C}$  に対し、C を codomain にもつような射の集合  $S_{\lambda}$  の集まり J(C) から成り、適切な公理を満たすもの:

$$J = \{J(C)\}_{C \in \mathcal{C}}, \quad J(C) = \{S_{\lambda}\}_{\lambda}, \quad S_{\lambda} = \{f_i \colon C_i \to C\}_i$$

 $\mathcal{A}(C,J)$  を site という。

 $\sim$  前層  $F: \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$  に対する貼り合わせ条件が記述でき、 $(\mathcal{C}, J)$  上の層の圏  $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$  が切り出せる。

#### Definition

 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$  の形の圏のことを Grothendieck トポスという。

### Grothendieck トポスの性質

### Proposition

 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$  は "Set っぽい" 以下の性質を持つ

- ▶ 任意の小極限・小余極限を持つ
- ▶ 像分解を持ち、それらは pullback で保たれる
- ▶ エピ射は正則エピ射で、よってバランス圏になっている
- ▶ exponential を持つ
- ▶ subobject classifier を持つ

また、包含函手 i は層化函手 a を左随伴に持つ:

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J) \xrightarrow{\longleftarrow} \underbrace{\overset{\mathbf{a}}{\perp}}_{i} \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$$

よって自然な函手  $\mathbf{ay} \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$  がある。

### 初等トポスの定義

Lawvere と Tierney は、トポスが Set と共通の性質を多く持つことに着目して、次の概念を得た:

#### Definition

locally small な圏  $\mathcal E$  が

- ▶ 有限完備
- ▶ exponential を持つ(デカルト閉圏)
- ▶ subobject classifier を持つ

を満たすとき、初等トポスという。

FinSet は初等トポスだが Grothendieck トポスではない。

Grothendieckトポスについて知られていた構成の多くは、初等トポスでもできる。また、初等トポスは"集合の宇宙"と見なせて、ここに論理学とのつながりが開かれた。

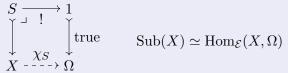
## 初等トポスの定義 (continued)

#### Definition

(1)  $\mathcal E$  が exponential を持つとは、任意の対象  $X\in\mathcal E$  に対して、直積函手  $(-)\times X\colon \mathcal E\to\mathcal E$  の右随伴が存在することをいう。この右随伴を  $(-)^X\colon \mathcal E\to\mathcal E$  と表す。

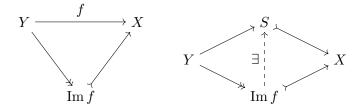
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(Y \times X, Z) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, Z^X)$$

(2)  $\mathcal E$  の subobject classifier とは、対象  $\Omega$  と射 true:  $1 \to \Omega$  の組  $(\Omega, \mathrm{true})$  であって、次の普遍性を持つようなもの: 任意の対象 X と部分対象  $S \rightarrowtail X$  に対し、次の図を pullback に するような射  $\chi_S \colon X \to \Omega$  が一意に存在する。



### 初等トポスの性質

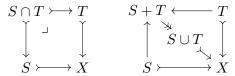
- ▶ 初等トポスは有限余完備
- ト 任意の射  $f\colon Y\to X$  は、像分解を持つ:(正則) エピ射とモノ射への分解  $Y\to \operatorname{Im} f\rightarrowtail X$  で "最小のもの"



▶ 任意の対象  $X \in \mathcal{E}$  について、スライス圏  $\mathcal{E}/X$  は初等トポス

## Logical Operations in a Topos I: Heyting Structures

▶ Sub(X) は Heyting 代数の構造を持つ。 meet と join は次の 構成で得られる:



 $S \Rightarrow T$  は  $\mathcal{E}/X$  の exponential を用いて作られる。

- ▶ 射  $f\colon Y\to X$  に対し pullback 写像  $f^*\colon\operatorname{Sub}(X)\to\operatorname{Sub}(Y)$  は Heyting 代数の準同型。
- Ωには "internal Heyting algebra" の構造が入る。

$$\wedge, \vee, \Rightarrow : \Omega \times \Omega \to \Omega, \quad \neg : \Omega \to \Omega$$

 $\mathcal{E}$  が Grothendieck トポスのときは、 $\mathrm{Sub}(X)$  は完備 Heyting 代数

## Logical Operations in a Topos II: Quantifiers as Adjoints

▶ 像分解から射  $f: Y \to X$  による順像  $\exists_f: \operatorname{Sub}(Y) \to \operatorname{Sub}(X)$ 

$$\begin{array}{ccc}
S & --- & \exists_f S \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y & \xrightarrow{f} & X
\end{array}$$

を得ると、 $\exists_f$  は  $f^*$  の左随伴になる。

▶ さらに  $f^*$  は右随伴  $\forall_f \colon \operatorname{Sub}(Y) \to \operatorname{Sub}(X)$  も持つ。

$$\operatorname{Sub}(Y) \xleftarrow{f^* \perp} \xrightarrow{\prod_{f} \operatorname{Sub}(X)} \operatorname{Sub}(X) \qquad \exists_f S \leq T \iff S \leq f^*T$$

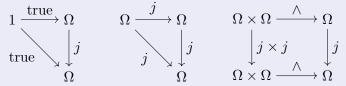
$$f^*T \leq S \iff T \leq \forall_f T$$

### Local Operator

前層圏  $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$  から site  $(\mathcal{C}, J)$  上の層トポス  $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$  をつくる操作は、初等トポス  $\mathcal{E}$  への一般化を持つ。

#### Definition

初等トポス  $\mathcal{E}$  上の **local operator** (a.k.a. Lawvere-Tierney 位相) とは、射  $j \colon \Omega \to \Omega$  であって次の図式を可換にするもの:



local operator j が与えられると、「対象  $X \in \mathcal{E}$  が j-層」という性質が定義できる。j-層が成す部分トポスを  $\mathcal{E}_j$  で表す。

特に重要なのが、double-negation local operator  $\neg \neg: \Omega \to \Omega$  である。 $\mathcal{E}_{\neg \neg}$  は Boolean トポス、i.e. Sub(X) が Boole 代数。

## Local Operator vs. Grothendieck Coverage

#### Theorem

- (1) 圏  $\mathcal{C}$  上の Grothendieck 被覆 J と、前層圏  $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$  上の local operator j は 1 対 1 に対応する。
- (2) 上の主張において対応する J と j について、 $F: \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$  が J-層であることと j-層であることは同値。

## Sketches of an Elephant

In his books Sketches of an Elephant (2002), Johnstone described as follows;

- (i) 'A topos is a category of sheaves on a site'
- (ii) 'A topos is a category with finite limits and power-objects'
- (iii) 'A topos is (the embodiment of) an intuitionistic higher-order theory'
- (iv) 'A topos is (the extensional essence of) a first-order (infinitary) geometric theory'
- (v) 'A topos is a totally cocomplete object in the meta-2-category CART of cartesian (i.e., finitely complete) categories'
- (vi) 'A topos is a generalized space'
- (vii) 'A topos is a semantics for intuitionistic formal systems'
- (viii) 'A topos is a Morita equivalence class of continuous groupoids'
  - (ix) 'A topos is the category of maps of a power allegory'
  - (x) 'A topos is a category whose canonical indexing over itself is complete and well-powered'
  - (xi) 'A topos is the spatial manifestation of a Giraud frame'
- (xii) 'A topos is a setting for synthetic differential geometry'
- (xiii) 'A topos is a setting for synthetic domain theory'

#### In his books Sketches of an Elephant (2002), Johnstone described as follows;

- (i) 'A topos is a category of sheaves on a site'
- (ii) 'A topos is a category with finite limits and power-objects'
- (iii) 'A topos is (the embodiment of) an intuitionistic higher-order theory'
- (iv) 'A topos is (the extensional essence of) a first-order (infinitary) geometric theory'
- (v) 'A topos is a totally cocomplete object in the meta-2-category C知究 of cartesian (i.e., finitely complete) categories'
- (vi) 'A topos is a generalized space'
- (vii) 'A topos is a semantics for intuitionistic formal systems'
- (viii) 'A topos is a Morita equivalence class of continuous groupoids'
  - (ix) 'A topos is the category of maps of a power allegory'
  - (x) 'A topos is a category whose canonical indexing over itself is complete and well-powered'
  - (xi) 'A topos is the spatial manifestation of a Giraud frame'
- (xii) 'A topos is a setting for synthetic differential geometry'
- (xiii) 'A topos is a setting for synthetic domain theory'

## Two Logical Aspects of Toposes

### ロジック的な視点からは、トポスには主に2つの側面がある

- Toposes as Mathematical Universes
  - ▶ "トポスの中で"数学的構造を考えられる
  - ▶ 集合論や型理論の圏論的解釈を与えられる
- ► Toposes as Theories
  - ▶ 理論とトポスが"対応する"(理論の分類トポス)
  - ▶ 理論のモデルは分類トポスからの函手と見なせる

同じトポスを様々な視点から調べられるのが最大の特徴!

#### Contents of the Current Section

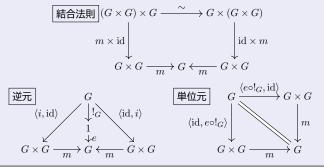
- トポス理論入門: Grothendieck トポスと初等トポス
  - Grothendieck トポス
  - 初等トポス
- 2 Toposes as Mathematical Universes
  - トポスにおける一階論理の解釈
  - Kripke-Joyal 意味論と Sheaf Semantics
- 3 圏論的論理学と分類トポス
  - 函手的意味論
  - 一階理論の分類トポス

### Structures in a Category

#### 一般の数学において、圏における代数的対象を考える場面は多い:

### Definition (群対象)

C を有限直積を持つ圏とする。C における**群対象**とは、対象 G, 射  $m:G\times G\to G$ ,  $e\colon 1\to G$ ,  $i\colon G\to G$  の組  $\langle G,m,e,i\rangle$  であって、次の図式を可換にするようなもの:

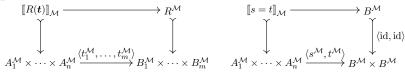


### 原子論理式の解釈

 $\mathcal{E}$  をトポス (or 以下を解釈するのに十分な構造を持つ圏) とする。 **多ソート言語**  $\mathcal{L}$  に対して、 $\mathcal{L}$ -構造  $\mathcal{M}$  は以下の割り当て:

- ▶ ソート A に対し、対象  $A^{\mathcal{M}} \in \mathcal{E}$
- ▶ 型 $\bar{A} \equiv A_1 \cdots A_n$  に対し、 $\bar{A}^{\mathcal{M}} := A_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times A_n^{\mathcal{M}}$
- ▶ 定数記号 c: A に対し、射  $c^{\mathcal{M}}: 1 \to A^{\mathcal{M}} \in \mathcal{E}$
- ▶ 函数記号  $f: A_1 \cdots A_n \to B$  に対し、射  $f^{\mathcal{M}}: \bar{A}^{\mathcal{M}} \to B^{\mathcal{M}} \in \mathcal{E}$
- ▶ 関係記号  $R:A_1\cdots A_n$  に対し、部分対象  $R^{\mathcal{M}} \rightarrowtail \bar{A}^{\mathcal{M}} \in \mathcal{E}$

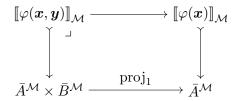
射の合成により帰納的に、項  $t: \bar{A} \to B$  の解釈  $t^{\mathcal{M}}: \bar{A}^{\mathcal{M}} \to B^{\mathcal{M}}$  が定まる。原子論理式  $R(t_1,\ldots,t_m)$ , s=t の解釈は、次の pullback を用いて得られる:



### 論理結合子の解釈

論理結合子は部分対象が成す Heyting 代数  $\mathrm{Sub}(ar{A}^{\mathcal{M}})$  の構造を使って自然に解釈する。

$$\label{eq:continuity} \begin{split} & [\![\varphi(\boldsymbol{x})]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\psi(\boldsymbol{x})]\!]_{\mathcal{M}} \in \operatorname{Sub}(\bar{A}^{\mathcal{M}}) \\ & \hspace{1cm} \rightsquigarrow [\![\varphi \wedge \psi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\neg \varphi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\varphi \Rightarrow \psi]\!]_{\mathcal{M}} \in \operatorname{Sub}(\bar{A}^{\mathcal{M}}) \\ & \text{ここで} \ \varphi(\boldsymbol{x}) : \bar{A} \ \mathsf{C仮想的な自由変数} \ \boldsymbol{y} : \bar{B} \ \mathsf{を追加するには}, \end{split}$$



### (一階の)量化記号の解釈

論理式  $\psi(x,y): \bar{A}\bar{B}$  に対し、 $\llbracket\exists y\psi
rbracket_{\mathcal{M}}$ , $\llbracket\forall y\psi
rbracket_{\mathcal{M}}$  を次で定める:射影  $\pi:=\mathrm{proj}_1: \bar{A}^{\mathcal{M}} imes \bar{B}^{\mathcal{M}} o \bar{A}^{\mathcal{M}}$  から誘導される随伴

$$\operatorname{Sub}(\bar{A}^{\mathcal{M}} \times \bar{B}^{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\begin{array}{c} \exists_{\pi} \\ \pi^* \bot \\ & \bot \\ & \forall_{\pi} \end{array}} \operatorname{Sub}(\bar{A}^{\mathcal{M}})$$

により、 $[\exists y\psi]_{\mathcal{M}} := \exists_{\pi} [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\forall y\psi]\!]_{\mathcal{M}} := \forall_{\pi} [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}$ とおく。

以上で、構造  $\mathcal M$  における一階論理式の解釈  $[\![\varphi]\!]_{\mathcal M} \mapsto \bar A^{\mathcal M}$  が定義された。特に閉論理式からは  $[\![\varphi]\!]_{\mathcal M} \mapsto 1$  が得られる。理論やモデルも適当な意味で定義される。

 $\mathcal{E}$  が Grothendieck トポスのときは、 $\mathrm{Sub}(X)$  が完備 Heyting 代数なので、ある種の無限論理和  $\bigvee$  を含むような<mark>幾何的論理</mark>まで解釈することができる。

## トポスの内部言語: Mitchell-Benabou language

今回は一般の高階論理の解釈ではなく、トポス  $\mathcal{E}$  から得られる Mitchell-Benabou language  $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  の解釈に限定して議論する。

### $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ は以下のデータから成る

- ▶ 基本ソートの集合  $\{ \lceil X \rceil ; X \in \mathcal{E} \}$
- ▶ 函数記号の集合  $\{\lceil f \rceil: \lceil X \rceil \rightarrow \lceil Y \rceil; f: X \rightarrow Y \in \mathcal{E} \}$

### 項の生成規則: $s: \lceil U \rceil \to \lceil X \rceil, t: \lceil V \rceil \to \lceil Y \rceil$ を項とする。

- ▶ 変数  $x: \lceil X \rceil$  に対し、項  $x: \lceil X \rceil \rightarrow \lceil X \rceil$
- ▶ 函数記号 $\lceil f \rceil$ :  $\lceil X \rceil \to \lceil Y \rceil$  に対し、項 $\lceil f \rceil \circ s$ :  $\lceil U \rceil \to \lceil Y \rceil$
- ▶  $\mathbf{\bar{q}} \langle s, t \rangle : \lceil U \times V \rceil \rightarrow \lceil X \times Y \rceil$
- ightharpoonup Y = X のとき、項  $(s = t): \lceil U \times V \rceil \to \lceil \Omega \rceil$
- $ightharpoonup Y = Z^X$  のとき、項 t(s): 「 $U \times V$ 」  $\to$  「Z」 (函数の適用)

# トポスの内部言語: Mitchell-Benabou language (continued)

- $ightharpoonup Y = \Omega^X$  のとき、項  $(s \in t)$ : 「 $U \times V$ 」  $\to$  「 $\Omega$ 」
- ▶  $U = Y \times V$  のとき、変数  $y : \lceil Y \rceil$  に対し、項  $(\lambda y.s) : \lceil V \rceil \rightarrow \lceil X^{Y} \rceil$  (Curry 化)

項  $t: \lceil X \rceil \to \lceil Y \rceil$  は自然な解釈  $[\![t]\!]_{\mathcal{E}}: X \to Y$  を持つ。

#### Definition

 $arphi\colon \lceil X \rceil o \lceil \Omega \rceil$ の形の項を<mark>論理式</mark>という。 論理式の解釈  $[\![ arphi ]\!]_{\mathcal{E}}: X o \Omega$  は X の部分対象と同一視できる。

 $\Omega$  上の internal Heyting 構造を用いて、論理式  $\varphi$ ,  $\psi$  に対し、項  $\varphi \wedge \psi$ ,  $\varphi \vee \psi$ ,  $\neg \varphi$ ,  $\varphi \Rightarrow \psi$ ,  $\exists y \varphi$ ,  $\forall y \varphi$  の解釈が定まる。 (部分対象との同一視により、一階論理式の場合の構成法と等価)

"論理的な圏"から得られる言語を一般に内部言語という。

## Kripke-Joyal 意味論

 $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  を用いてトポス  $\mathcal{E}$  を調べる際には、次の意味論が用いられる。

## Definition (Kripke-Joyal 意味論)

## Proposition

論理式  $\theta \equiv \varphi \wedge \psi, \, \varphi \vee \psi, \, \neg \varphi, \, \varphi \Rightarrow \psi, \, \exists y \varphi, \, \forall y \varphi$  に対する関係  $U \Vdash \theta(\alpha)$  は、 $\varphi, \, \psi$  に対する  $\Vdash$  関係を用いて表現できる。例えば、

- ▶  $U \Vdash \varphi(\alpha) \lor \psi(\alpha)$  iff 射  $p \colon V \to U, q \colon W \to U$  が存在して、 $p+q \colon V+W \twoheadrightarrow U$  がエピ射かつ  $V \Vdash \varphi(\alpha p)$  かつ  $W \Vdash \psi(\alpha q)$
- ▶  $U \Vdash \exists y \varphi(\alpha, y)$  iff エピ射  $p \colon V \twoheadrightarrow U \trianglerighteq \beta \colon V \to Y$  が存在して、 $V \Vdash \varphi(\alpha p, \beta)$

### Sheaf Semantics I: 前層圏の場合

 $\mathcal{E}$  が Grothendieck トポス  $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$  の場合を考える。対象  $C\in\mathcal{C}$  に対し、 $\mathbf{ay}C\Vdash\varphi(\alpha)$  を簡単に  $C\Vdash\varphi(\alpha)$  と書く。ここで  $\alpha\colon \mathbf{ay}C\to X$  は  $\alpha\in X(C)$  と対応することに注意。

特に  $\mathcal{E} = \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$  のときは、K-J 意味論について次が成り立つ:

- $ightharpoonup C \Vdash \varphi(\alpha) \lor \psi(\alpha) \text{ iff } C \Vdash \varphi(\alpha) \text{ $\sharp$} \text{$\sharp$} \text{$\sharp$} \text{$\iota$} \text{$\iota$} C \Vdash \psi(\alpha)$
- ▶  $C \Vdash \exists y \varphi(\alpha, y)$  iff ある  $\beta \in Y(C)$  が存在して  $C \Vdash \varphi(\alpha, \beta)$

この場合は、直観主義論理に対する Kripke 意味論や、モデル理論における有限強制と関わりがある。

### Sheaf Semantics II: Cohen トポスの場合

順序集合  $\mathbb{P}$  に対して、 $\mathbf{Sh}(\mathbb{P},\neg\neg)\simeq(\mathbf{Set}^{\mathbb{P}^{\mathrm{op}}})_{\neg\neg}$  を考える。 このとき K-I 意味論について次が成り立つ:

- ▶  $p \Vdash \varphi(\alpha) \lor \psi(\alpha)$  iff 任意の  $q \le p$  に対して、ある  $r \le q$  が存在して、 $r \Vdash \varphi(\alpha \cdot r)$  または  $r \Vdash \psi(\alpha \cdot r)$
- ▶  $p \Vdash \exists y \varphi(\alpha, y)$  iff 任意の  $q \leq p$  に対して、ある  $r \leq q$  と  $\beta \in Y(r)$  が存在して、 $r \Vdash \varphi(\alpha \cdot r, \beta)$
- この場合は、Cohen の強制法に関わりがある。
- → 連続体仮説を満たさないトポスの構成など

この他にも、 $\mathcal{E}$  が realizability topos(これは Grothendieck トポスではない)の場合などに K-J 意味論の応用がある。

また、圏論の命題を、内部言語に関する論理推論によって示すことができる。

#### Contents of the Current Section

- 1 トポス理論入門:Grothendieckトポスと初等トポス
  - Grothendieck トポス
  - 初等トポス
- 2 Toposes as Mathematical Universes
  - トポスにおける一階論理の解釈
  - Kripke-Joyal 意味論と Sheaf Semantics
- 3 圏論的論理学と分類トポス
  - 函手的意味論
  - 一階理論の分類トポス

### Lawvere の函手的意味論

等式理論 T に対し、次のような syntactic category  $\mathcal{C}_T$  を考える: 対象  $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_T) := \{ [n] : n \in \omega \}$  ([n] は形式的表現)

射 
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_T}([m],[n])$$

 $:=\{(t_1,\ldots,t_n):m$  引数の項の n-tuples  $\}/\sim$ 

ただしここで、 $t \sim s \iff T \vdash \forall x \bigwedge_i t_i(x) = s_i(x)$ このとき、 $\mathcal{C}_T$  は有限直積を持つ圏( $[n] = [1] \times \cdots \times [1]$ )。

さらに、*T-*代数 *M* から

$$t:[m]\to[n] \qquad \mapsto \qquad t^{\mathcal{M}}:\mathcal{M}^m\to\mathcal{M}^n$$

によって、直積を保つ函手  $F_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}$  が得られる。この対応  $\mathcal{M} \mapsto F_{\mathcal{M}}$  は次の圏同値を誘導:

$$T$$
-Alg  $\simeq$  FinProdFunc( $\mathcal{C}_T$ , Set)

一般に「**理論に圏を」「モデルに函手を**」対応させるような枠組みを<mark>函手的意味論</mark>という。どんな圏論的論理学においても、函手的意味論を構築するのが最初のステップになる。

### 一階述語論理の函手的意味論

以下ではT は一階理論、 $\mathcal{E}$  は Grothendieck トポスとする。先述したトポス $\mathcal{E}$  におけるT-モデルに対しても、等式理論と同様のことができる。例えば、T が cartesian logic と呼ばれる断片で記述されているとき、syntactic category  $\mathcal{C}_T$  を

対象 
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_T) := \{ \, \varphi(\boldsymbol{x}) \, ;$$
 論理式  $\}$  射  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\varphi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{y})) := \{ \, \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, ;$  函数論理式  $\}/\sim$  ここで、論理式  $\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$  が函数論理式であるとは、  $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} [\chi \to \varphi \land \psi], \quad \forall \boldsymbol{x} [\varphi \to \exists \boldsymbol{y} \chi]$ 

がTから証明可能であることをいう。 で定めると、「定義可能集合を取る函手」を得る対応により、

$$T ext{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{Lex}(\mathcal{C}_T, \mathcal{E})$$

ただし、左辺は  $\mathcal{E}$  における T-モデルと準同型の圏、右辺は有限極限を保つ函手と自然変換の圏。

### Gödel の完全性

syntactic category  $\mathcal{C}_T$  は、T からの証明可能性の情報を持つ:

$$T \vdash \varphi \iff$$
射  $\varphi \rightarrowtail (\forall x.x = x)$  が同型射

そこで、Gödel の完全性定理は函手的意味論を介して次のような 圏論的命題と対応する:

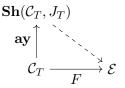
(適当な圏論的構造を保つ)函手の族  $\{F_i\colon \mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}\}_i$  が存在して、任意の射  $f\in \mathcal{C}_T$  に対し、

 $\forall i, F_i(f)$  が同型射  $\Longrightarrow f$  自身が同型射

このように、ロジック的現象を圏論的に表現することで論理と圏 論の関係性を調べることが、圏論的論理学に通底する目標である。

### 一階理論の分類トポス

**分類トポス**の概念により、理論を Mathematical Universe としてのトポスと同じ土俵に持っていける:syntactic category  $\mathcal{C}_T$  上に適当な Grothendieck 被覆  $J_T$  を与えると、 $J_T$ -連続な函手  $F\colon \mathcal{C}_T \to \mathcal{E}$  からトポスの幾何的射  $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T,J_T) \to \mathcal{E}$  が得られる。



 $J_T$ -連続性が極限の保存などに対応するように  $J_T$  を構成しておけば、次の圏同値が得られる:

$$T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{Cont}_{J_T}(\mathcal{C}_T, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Geom}^*(\mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T), \mathcal{E})$$

ここで  $Geom^*(\mathcal{F}, \mathcal{E})$  は幾何的射と幾何的変換の圏。このような普遍性を持つトポスを T の分類トポスといい、Set[T] で表す。

### 分類トポスと内部言語

Grothendieck トポス  $\mathcal{E}$  に対しては、M-B language とは異なる 一階の内部言語およびその上の幾何的理論  $T_{\mathcal{E}}$  を構成でき、

$$\mathcal{E} \simeq \mathbf{Set}[T_{\mathcal{E}}], \quad \mathbf{Geom}^*(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq T_{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{Mod}(\mathcal{F})$$

分類トポス・内部言語を介して幾何的理論とトポスを行き来して、 ロジック ↔ 圏論と双方向の応用が可能になる

- ▶ ロジック → 圏論の例:連結で原子的な点無しトポスの構成
- ▶ 圏論 → ロジックの例:Deligne の定理と完全性定理

cf. 高階理論の場合、理論 T から初等トポス  $\mathcal{E}_T$  が与えられ、トポス  $\mathcal{F}$  における T のモデルはトポスの論理的射  $\mathcal{E}_T \to \mathcal{F}$  に対応する

$$T ext{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{F}) \simeq \mathbf{Log}(\mathcal{E}_T, \mathcal{F})$$

また、M-B language  $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$  は、 $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_T$  なる高階理論 T を記述するのに用いられる。

### 分類トポスとモデル理論

- ▶ Makkai: 完全性定理、圏の埋め込み定理とタイプ排除
- ▶ Blass & Scedrov: Boolean coherent classifying topos と理論の可算範疇性、existentially closed model/finite-generic model の分類トポスの構成
- ▶ Caramello: 理論の性質と分類トポスの性質の関連、Fraisse 構成の圏論的一般化、可算均質モデルの自己同型群について のガロア理論 etc.

### 参考文献

- [1] O. Caramello. **Theories, Sites, Toposes: Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'**. Oxford University Press, 2018.
- [2] P. T. Johnstone. Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium. 2 vols. Oxford Logic Guides 43,44. Clarendon Press, 2002.
- [3] S. Mac Lane and I. Moerdijk. Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory. Universitext. Springer-Verlag, 1992.