

ランダムネス入門

木原 貴行

北陸先端科学技術大学院大学 (JAIST)

独立行政法人 日本学術振興会 (JSPS)

特別研究員 PD

URL: <http://researchmap.jp/kihara>

Email: kihara.takayuki.logic@gmail.com

【最終更新】2012年9月5日

謝辞

本稿は，2012年9月4日から7日に開催される数学基礎論サマースクール『計算可能性とランダムネス』における筆者の講義『歪んだコインとフラクタル』の講義資料として作成されたものです．2012年度数学基礎論サマースクール幹事の只木孝太郎先生，鹿島亮先生，鈴木登志雄先生，および，講師の宮部賢志氏，樋口幸治郎氏に感謝致します．また，JAISTにてセミナーに付き合っ下さった他，講義資料作成等に助言を下された，石原哉先生，根元多佳子氏，河井達治氏，吉村和人氏，伊藤成孝氏，新井規広氏に感謝致します．

記号リスト

- $\#X$ 集合 X の濃度を表す .
- X^Y 集合 Y から集合 X への関数全体の集合 . たとえば $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ で自然数の無限列全体の集合を表す .
- $X^{<\mathbb{N}}$ X の元の有限列全体の集合 . 各 $x \in X^{<\mathbb{N}}$ は , $x = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ のように表す .
 $X^{\leq n}, X^{\geq n}$ でそれぞれ長さ n 以下 , n 以上の有限列を表す .
- $\langle \rangle$ 空列を表す .
- $\sigma \frown \tau$ $\sigma \in X^{<\mathbb{N}}$ と $\tau \in X^{<\mathbb{N}}$ の結合 (*concatenation*) を表す .
 τ が長さ 1 の列 , つまり $\tau = \langle t \rangle$ の形だった場合 , $\sigma \frown \tau$ の代わりに単に σt と書く .
- $|\sigma|$ $\sigma \in X^{<\mathbb{N}}$ のとき , $|\sigma|$ によって σ の長さを表す .
- $\alpha \upharpoonright n$ 列 $\alpha = \langle a_0, a_1, \dots \rangle$ の長さ n の始切片 $\alpha \upharpoonright n = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ を表す .
- \preceq 列 σ, τ に対して , $\sigma \preceq \tau$ は , σ が τ の始切片 , つまり $\sigma = \tau \upharpoonright |\sigma|$ であることを意味する .
- σ^- 有限列 $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ の最後の値を削ったもの , つまり $\sigma \upharpoonright |\sigma| - 1$ を表す .
- $[[\sigma]]$ $\sigma \in X^{<\mathbb{N}}$ が生成する開閉 (*clopen*) 集合 $[[\sigma]] = \{\alpha \in X^{\mathbb{N}} : \sigma \prec \alpha\}$ を表す .
- $[S]$ $S \subseteq X^{<\mathbb{N}}$ が生成する開 (*open*) 集合 $[S] = \bigcup_{\sigma \in S} [[\sigma]]$ を表す .
- λ 確率 $(1/2, 1/2)$ の公平なコイン投げから得られる $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度を表す .
- $0.\alpha$ 無限列 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ をある実数 $r \in (0, 1)$ の小数点以下の 2 進表記とみなしたときの値 r を表す .

目次

第 1 章	測度 = 賭博 = 圧縮	1
1.1	賭博とマルチンゲール	1
1.2	博打で大金を掴める確率	3
1.3	コレクティブと頻度説 *	5
1.4	コレクティブとマルチンゲール *	8
1.5	確率過程とマルチンゲール **	11
1.6	データを圧縮できる確率	15
第 2 章	ランダムネスとは何か	19
2.1	ランダムネスの基本定理	19
2.2	チャイティンのオメガ	23
2.3	マルチンゲール vs. マルチンゲール過程 **	23
2.4	真のランダムネスと非可測集合 **	26
第 3 章	ランダムネスとフラクタル次元	28
3.1	歪んだコインとマルチンゲール	28
3.2	歪んだコインが複数あるとき	30
3.3	偏った数列の次元	34
3.4	エントロピーとハウスドルフ次元	37
3.5	超越数論とランダムネス	39
第 4 章	ランダムネス抽出と次元論	41
4.1	フォン・ノイマンのトリック	41
4.2	次元の壁を越えるのは難しい *	43
4.3	零次元よりも低次元の世界 *	45
4.4	ランダムネスと一次元の狭間 *	45
4.5	隈部/ルイス強制法	50
第 5 章	普遍零集合と強零集合	56
5.1	絶対にランダムでない無限列その 1	56
5.2	絶対にランダムでない無限列その 2	58
5.3	ランダムネスと強零集合	61

第 6 章	力学系とエントロピー	64
6.1	次元 = エントロピー = 複雑性	64
第 7 章	【付録】計算可能性理論の予備知識	69
7.1	ポレル階層と超算術的階層	69
7.2	ハウスドルフ階層と極限的学習	74
7.3	不連続関数の階層と可測関数	74
索引		77

第3章

ランダムネスとフラクタル次元

3.1 歪んだコインとマルチンゲール

問題設定. ここに、2頭の馬 A と B がいる。この馬たち A と B が競争したとき、今の所 A の勝率が 70% であり、 B の勝率が 30% であった。さて、カジノ運営者 C 氏は、この二頭の馬を用いた競馬賭博を開催することにした。このとき、各馬券の配当額を幾らに指定すれば、公平な賭博になるだろうか。

勝率に偏りのある競馬、あるいは表裏の出現確率に偏りのあるコインが生み出す確率測度は、ベルヌーイ測度と呼ばれる。ここでは、より一般の概念として、第 n 回目の試行では、表の出現確率が p_n であり、裏の出現確率が $1 - p_n$ であるようなコイン投げから得られる確率測度としてのベルヌーイ測度を導入する。

定義 3.1 (ベルヌーイ測度). 実数列 $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ が与えられたとき、次の 3 条件を満たす $m_p : \{0, 1\}^{<\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ から得られる $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度 λ_p をバイアス p のベルヌーイ測度 (*Bernoulli measure with bias p*) と呼ぶ:

1. $m_p(\langle \rangle) = 1$ である。
2. 任意の $\sigma \in \{0, 1\}^n$ に対して、 $m_p(\sigma 0) = p_n \cdot m_p(\sigma)$ である。
3. 任意の $\sigma \in \{0, 1\}^n$ に対して、 $m_p(\sigma 1) = (1 - p_n) \cdot m_p(\sigma)$ である。

例 3.1. 実数 $p \in [0, 1]$ のみからなる実数列 (p, p, p, \dots) を単に p で表す。 λ_p をバイアス p のベルヌーイ測度とし、 $\#i(\sigma)$ によって $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ 中に現れる $i \in \{0, 1\}$ の総数、つまり $\#\{n < |\sigma| : \sigma(n) = i\}$ を意味するものとする。このとき、各 $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ について、 $[\sigma]$ の λ_p -確率は以下の値となる:

$$\lambda_p([\sigma]) = m_p(\sigma) = p^{\#0(\sigma)} \cdot (1 - p)^{\#1(\sigma)}.$$

より一般に、 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上のどんなボレル確率測度も、それぞれの有界的条件 $[\sigma]$ が成立する確率 $m(\sigma)$ がどの程度であるかを指定することによって得られる。

定理 3.1 (カラテオドリの拡張定理). $m : \{0, 1\}^{<\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ を、 $m(\langle \rangle) = 1$ かつ、任意の $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ に

ついて $m(\sigma) = m(\sigma_0) + m(\sigma_1)$ となる関数とする．このとき， $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上のボレル確率測度 μ_m で，任意の $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ について $\mu_m([\![\sigma]\!]) = m(\sigma)$ を満たすようなものが一意に存在する．

さて，0 の出現確率が p であり，1 の出現確率が $1 - p$ であるとしよう．すると，オッズとしては，0 の出現を当てた場合には賭け金の $1/p$ 倍，1 の出現を当てた場合には賭け金の $1/(1 - p)$ 倍の配当金が妥当であるように思える．もし，0 が出現することに q_0 ドル，1 が出現することに q_1 ドル賭けた場合，資金の変動過程は，以下ようになる．

$$\begin{aligned} d(\sigma_0) &= d(\sigma) - (q_0 + q_1) + \frac{q_0}{p}, \\ d(\sigma_1) &= d(\sigma) - (q_0 + q_1) + \frac{q_1}{1-p}. \end{aligned}$$

したがって， $p \times (\text{上式}) + (1-p) \times (\text{下式})$ を計算することによって，

$$d(\sigma) = pd(\sigma_0) + (1-p)d(\sigma_1)$$

という条件が満たされる．確率測度 μ が与えられており，現在までに得た 0 と 1 の列が σ であるとき，次に $i \in \{0, 1\}$ が出現する確率は，条件付確率 $\mu([\![\sigma i]\!]) = \mu([\![\sigma i]\!]) / \mu([\![\sigma]\!])$ によって得られるため，このような配当金指定に対応するマルチンゲールは，以下の条件を満たすものと特徴付けられる．

定義 3.2 (任意の測度に対するマルチンゲール). μ を $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上の任意の確率測度とする．このとき， $d: \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ が任意の $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ に対して次の条件を満たすとき， μ -マルチンゲール (μ -martingale) と呼ばれる：

$$d(\sigma) = \frac{\mu([\![\sigma 0]\!])d(\sigma_0) + \mu([\![\sigma 1]\!])d(\sigma_1)}{\mu([\![\sigma]\!])}.$$

Ville の定理 1.1 は，任意の測度において成立する．

定理 3.2. μ を $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上の任意の確率測度とし， $q \geq 1$ を実数とする． d が μ -マルチンゲールならば，ある $n \in \mathbb{N}$ で $d(\alpha \upharpoonright n) \geq q \cdot d(\langle \rangle)$ となる α 全体の集合の μ -測度は q^{-1} 以下である．

証明. 基本的には，定理 1.1 の証明と同様である．単純のために初期資金は $d(\langle \rangle) = 1$ であるとする．まず， S を $d(\sigma) \geq q$ を満たす極小な $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ たちの集合として定義する．目標は， $\lambda([S]) \leq q^{-1}$ を示すことである．このとき，

$$\mu([S]) \cdot q = \sum_{\sigma \in S} \mu([\![\sigma]\!]) \cdot q \leq \sum_{\sigma \in S} \mu([\![\sigma]\!])d(\sigma).$$

あとは， $\sum_{\sigma \in S} \mu([\![\sigma]\!])d(\sigma) \leq d(\langle \rangle) = 1$ であることを示せばよい．任意の数 $k \in \mathbb{N}$ について， $S[k] = S \cap \{0, 1\}^{<k}$ と書く．もし，任意の $k \in \mathbb{N}$ について $a_k = \sum_{\sigma \in S[k]} \mu([\![\sigma]\!])d(\sigma) \leq 1$ ならば， $\lim_k a_k \leq 1$ であるから，以下を示せば十分であることが分かる．

主張. $\tau \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ を任意の有限列とする．もし $F \subseteq \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ が τ を拡張する有限列たちからなる有限 \leq -反鎖ならば， $\sum_{\sigma \in F} \mu([\![\sigma]\!])d(\sigma) \leq \mu([\![\tau]\!])d(\tau)$ が成立する．

F の濃度に関する帰納法によって示す． $\#F = 1$ であるときは，たとえ τ 時点での所持金 $d(\tau)$ を元手に，以後の結果が $\sigma \succeq \tau$ のように続くという確信の下で全額賭け続けたとしても， $d(\sigma) \leq (\mu([\![\tau]\!]) / \mu([\![\sigma]\!]))d(\tau)$ となることから， $\mu([\![\sigma]\!])d(\sigma) \leq \mu([\![\tau]\!])d(\tau)$ となり，主張は導かれる．

$\#F = n$ のとき主張は成立していると仮定する. F を濃度 $n+1$ の反鎖とする. τ を $F \subseteq \{\sigma : \tau \preceq \sigma\}$ なる最大の長さの有限列とする. このとき, 各 $i < 2$ について $F_i = \{\sigma \in F : \tau i \preceq \sigma\}$ は濃度 n 以下である. 帰納的仮定より, 以下が導かれる.

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in F} \frac{\mu(\llbracket \sigma \rrbracket)}{\mu(\llbracket \tau \rrbracket)} d(\sigma) &= \sum_{i < 2} \sum_{\sigma \in F_i} \frac{\mu(\llbracket \sigma \rrbracket)}{\mu(\llbracket \tau \rrbracket)} d(\sigma) = \sum_{i < 2} \sum_{\sigma \in F_i} \frac{\mu(\llbracket \tau i \rrbracket)}{\mu(\llbracket \tau \rrbracket)} \cdot \frac{\mu(\llbracket \sigma \rrbracket)}{\mu(\llbracket \tau i \rrbracket)} d(\sigma) \\ &\leq \sum_{i < 2} \frac{\mu(\llbracket \tau i \rrbracket)}{\mu(\llbracket \tau \rrbracket)} d(\tau i) = d(\tau). \end{aligned}$$

両辺に $\mu(\llbracket \tau \rrbracket)$ を掛けることによって, $\sum_{\sigma \in F} \mu(\llbracket \sigma \rrbracket) d(\sigma) \leq \mu(\llbracket \tau \rrbracket) d(\tau)$ を得る. \square

定理 3.3 (ボレル測度の正則性). μ を $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上のボレル測度とする. このとき, 任意の μ -可測集合 $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ に対して, 開集合の下降列 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で, 次を満たすものが存在する:

$$\mu(A) = \inf_{n \rightarrow \infty} \mu(U_n), \text{ かつ } A \subseteq U_n.$$

$\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上のボレル測度の正則性より, 零集合を取り扱う際, 測度が 0 に収束する開集合の下降列のみを考慮すればよい.

定義 3.3 (任意の測度に対するランダムネス). μ を $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上の任意のボレル確率測度とする. 集合 $N \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ が実効 μ -零 (effectively μ -null) であるとは, ある計算的枚挙可能集合列 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次を満たすものが存在するときを指す:

$$\mu(U_n) \leq 2^{-n}, \text{ かつ } N \subseteq U_n.$$

無限列 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ に対して, $\{\alpha\}$ が実効 μ -零でないとき, α はマーティンレフ μ -ランダム (Martin-Löf μ -random) あるいは単に μ -ランダムであると呼ばれる.

定理 3.4. μ を $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上の任意の計算可能確率測度とする. このとき, 任意の無限列 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ に対して, 次の 2 条件は同値である.

1. α は μ -ランダムである.
2. 任意の下半計算可能 μ -マルチンゲール $d: \{0, 1\}^{<\mathbb{N}} \rightarrow [0, \infty)$ に対して, 次の条件が成立する:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(\alpha \upharpoonright n) < \infty.$$

結論. A の勝率が 70% であり, B の勝率が 30% であるとき, 配当金の倍率は, A が 10/7 倍, B が 10/3 倍としておけば公平な賭博となる.

3.2 歪んだコインが複数あるとき

問題設定 . いま、手許には歪んだコインが2つあって、それぞれ A と B と呼ぼう。 A と B の歪み具合は結構違うようである。さて、コイン A を投げて得られる無限列が表すランダム性と、コイン B を投げて得られる無限列が表すランダム性には、どういう違いがあるだろうか？

実数列 $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ が強正であるとは、次の条件を満たすことである：

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} p_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} p_n < 1.$$

定理 3.5 (角谷の定理 1948). $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ と $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を $[0, 1]$ に属す実数の強正な列とする。 λ_p と λ_q をそれぞれバイアス $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ および $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ の強正一般ベルヌーイ測度とする。このとき、以下の3条件は同値である。

1. $\sum_{i=0}^{\infty} (p_i - q_i)^2 < \infty$.
2. 任意の集合 $N \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ について、 $\lambda_p(N) = 0$ であることと $\lambda_q(N) = 0$ であることは同値である。
3. $\lambda_p(N) = 0$ かつ $\lambda_q(N) = 1$ であるような集合 $N \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ は存在しない。

証明. ここでは (3) から (1) の導出のみを示す。他の部分については、後に、より強い性質が示される。 $\sum_{i=0}^{\infty} (p_i - q_i)^2 = \infty$ を仮定する。強正であるという仮定から、 $p_i, q_i \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する。 ν をバイアス $((p_i + q_i)/2)_{i \in \mathbb{N}}$ のベルヌーイ測度とする。いま、各 $i \in \mathbb{N}$ について、次の性質が成立する。

$$\left(\frac{p_i + q_i}{2} \right)^2 = p_i q_i \left(1 + \frac{(p_i - q_i)^2}{4p_i q_i} \right) \geq p_i q_i \left(1 + \frac{(p_i - q_i)^2}{4\varepsilon^2} \right).$$

同様にして、

$$\begin{aligned} \left(\frac{(1-p_i) + (1-q_i)}{2} \right)^2 &= (1-p_i)(1-q_i) \left(1 + \frac{(p_i - q_i)^2}{4(1-p_i)(1-q_i)} \right) \\ &\geq (1-p_i)(1-q_i) \left(1 + \frac{(p_i - q_i)^2}{4\varepsilon^2} \right). \end{aligned}$$

を得る。これより、各列 $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ について、次を得る。

$$\nu(\llbracket \sigma \rrbracket)^2 \geq \lambda_p(\llbracket \sigma \rrbracket) \lambda_q(\llbracket \sigma \rrbracket) \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{(p_{|\sigma|} - q_{|\sigma|})^2}{4\varepsilon^2} \right)$$

これより、長さを無限大に発散させたとき、 $\sum_{i=0}^{\infty} (p_i - q_i)^2 = \infty$ であるという仮定より、右辺の積の項は無限大に発散する。したがって、任意の自然数 $k > 0$ に対して、十分大きな自然数 $n_k \in \mathbb{N}$ が存在して、長さ n_k の任意の列 $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ について、 $\nu(\llbracket \sigma \rrbracket) \geq k \lambda_p(\llbracket \sigma \rrbracket) \lambda_q(\llbracket \sigma \rrbracket)$ が成立する。 N_k を $\lambda_p(\llbracket \sigma \rrbracket) \leq \lambda_q(\llbracket \sigma \rrbracket)$ なる長さ n_k の列全体から生成される開閉集合とする。そのような σ について、 $\nu(\llbracket \sigma \rrbracket)^2 \geq k \lambda_p(\llbracket \sigma \rrbracket)^2$ であるから、

$$\lambda_p(N_k) \leq \frac{\nu(N_k)}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

が成立する。同様にして、 $\lambda_q(\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus N_k) \leq 1/k$ が成立するため、 $\lambda_q(N_k) \geq 1 - 1/k$ を得る。いま、 $N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k > 2^{2n}} N_k$ によって定義する。このとき、 $\lambda_p(\bigcup_{k > 2^{2n}} N_k) \leq 2^{-n}$ であるから、 $\lambda_p(N) = 0$ を得る。

また, $\lambda_q(\bigcup_{k>2^{2n}} N_k) \geq 1 - 2^{-n}$ であり, 集合の増大列であるから, $\lambda_q(N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_q(\bigcup_{k>2^{2n}} N_k) = 1$ を得る. \square

定理 3.6 (Vovk 1987). λ_p と λ_q をそれぞれバイアス $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ および $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ の強正一般ベルヌーイ測度とする. もし $\sum_{n=0}^{\infty} (p_n - q_n)^2 = \infty$ ならば, 任意の無限列 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ に対して, 次の性質が成立する.

1. α が λ_p -ランダムならば, λ_q -ランダムではない.
2. α が λ_q -ランダムならば, λ_p -ランダムではない.

補題 3.1. μ と ν を $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 上の計算可能な確率測度とする. このとき, 以下の2条件は同値である.

1. $\mu(N) = 0$ かつ $\nu(N) = 1$ を満たす集合 $N \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ が存在する.
2. μ -ランダムかつ ν -ランダムであるような無限列は存在しない.

証明. (2) \Rightarrow (1): R_ν を ν -ランダム列全体の集合とすると, $\nu(R_\nu) = 1$ である. 一方, 仮定より, $R_\nu \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus R_\mu$ であり, $\mu(R_\mu) = 1$ であるから, $\mu(R_\nu) = 0$ が成立する.

(1) \Rightarrow (2): $\mu(N) = 0$ かつ $\nu(N) = 1$ を満たす集合 $N \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ が存在すると仮定する. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, μ の正則性より, 開集合 $U_n \supseteq N$ で, $\mu(U_n) < 2^{-n}$ なるものが存在する. また, $N \subseteq U_n$ なので, $\nu(U_n) = 1$ である. よって, ある開閉集合 $V_n \subseteq U_n$ で, $\nu(V_n) > 1 - 2^{-n}$ なるものが存在する. μ と ν は共に計算可能であるから, n からこのような開閉集合 V_n を計算する手続きが存在する. 各 $n \in \mathbb{N}$ について $W_n = \bigcup_{m>n} U_m$ によって定義すれば, $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は計算的枚挙可能集合列であり, $\mu(W_n) \leq 2^{-n}$ かつ $\nu(W_n) = 1$ である. したがって, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$ は実効 μ -零であり, 各 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus W_n$ は実効 ν -零である. よって, α が μ -ランダムならば $\alpha \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$ である一方, α が ν -ランダムならば $\alpha \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$ である. \square

証明 (定理 3.6). 定理 3.5 における (3) \Rightarrow (1) により, $\sum_{n=0}^{\infty} (p_n - q_n)^2 = \infty$ ならば, $\lambda_p(N) = 0$ かつ $\lambda_q(N) = 1$ であるような集合 $N \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ が存在する. よって, 補題 3.1 より, λ_p -ランダムかつ λ_q -ランダムであるような無限列は存在しない. \square

定理 3.7 (Vovk 1987). λ_p と λ_q をそれぞれバイアス $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ および $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ の強正一般ベルヌーイ測度とし, $\sum_{n=0}^{\infty} (p_i - q_i)^2 < \infty$ が成立していると仮定する. このとき, 無限列 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ が λ_p -ランダムであることと λ_q -ランダムであることは同値である.

証明. 無限列 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ が λ_p -ランダムでないとする. このとき, ある下半計算可能マルチンゲール \tilde{d} が存在して, $\lim_n \tilde{d}(\alpha \upharpoonright n) = \infty$ となる. いま, \tilde{d} を次のように分解する:

$$\tilde{d}(\sigma) = \frac{\tilde{d}(\sigma) \cdot \lambda_p(\llbracket \sigma \rrbracket)}{\lambda_q(\llbracket \sigma \rrbracket)} \cdot \frac{\lambda_q(\llbracket \sigma \rrbracket)}{\lambda_p(\llbracket \sigma \rrbracket)}.$$

単純計算により, $d_q(\sigma) = \tilde{d}(\sigma) \cdot \lambda_p(\llbracket \sigma \rrbracket) / \lambda_q(\llbracket \sigma \rrbracket)$ は下半計算可能 λ_q -マルチンゲールであることが分かる. もし $\lim_n d_q(\alpha \upharpoonright n) = \infty$ であれば, α が λ_q -ランダムでないことが従う. したがって, 後は $\lim_n d_q(\alpha \upharpoonright n) < \infty$ の場合を考えればよい. このとき, $d(\sigma) = \lambda_q(\llbracket \sigma \rrbracket) / \lambda_p(\llbracket \sigma \rrbracket)$ によって d を定義したとき, $\lim_n d(\alpha \upharpoonright n) = \infty$

でなければならない．再び単純計算によって， d は計算可能 λ_p -マルチンゲールであると分かる．これから，ある計算可能 λ_q -マルチンゲール d^* で，次を満たすものを構成する．

$$(\exists c \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \log d(\alpha \upharpoonright n) \leq d^*(\alpha \upharpoonright n) + c.$$

まずは， d^* として，負の値を取り得るものを定義し，後に修正を与える．いま，各 $n \in \mathbb{N}$ について， $\alpha(n)$ の値に対して， d は所持金の η_n 倍を 0 か 1 に賭けていたとする．言い換えれば，各 $i \in \{0, 1\}$ について， $d(\alpha \upharpoonright n \hat{\ } i)$ の値を以下のように設定する．

$$d(\alpha \upharpoonright n \hat{\ } i) = \begin{cases} (1 - \eta_n) \cdot d(\alpha \upharpoonright n), & \text{if } d \text{ の } \alpha(n) \text{ の推測が謝っている,} \\ \left(1 + \eta_n \frac{1 - p_n}{p_n}\right) \cdot d(\alpha \upharpoonright n), & \text{if } i = 0 \text{ かつ } d \text{ の } \alpha(n) \text{ への推測が正しい,} \\ \left(1 + \eta_n \frac{p_n}{1 - p_n}\right) \cdot d(\alpha \upharpoonright n), & \text{if } i = 1 \text{ かつ } d \text{ の } \alpha(n) \text{ への推測が正しい.} \end{cases}$$

このとき， d^* は d の推測と同じ値に，所持金のうち η_n を賭ける．つまり， d が所持金の 10% を賭けに用いたならば， d^* は所持金のうち 10 ドルを賭けに用いる．言い換えれば，各 $i \in \{0, 1\}$ について， $d^*(\alpha \upharpoonright n \hat{\ } i)$ の値を以下のように設定する．

$$d^*(\alpha \upharpoonright n \hat{\ } i) = \begin{cases} d^*(\alpha \upharpoonright n) - \eta_n, & \text{if } d \text{ の } \alpha(n) \text{ の推測が謝っている,} \\ \eta_n \frac{1 - q_n}{q_n} + d^*(\alpha \upharpoonright n), & \text{if } i = 0 \text{ かつ } d \text{ の } \alpha(n) \text{ への推測が正しい,} \\ \eta_n \frac{q_n}{1 - q_n} + d^*(\alpha \upharpoonright n), & \text{if } i = 1 \text{ かつ } d \text{ の } \alpha(n) \text{ への推測が正しい.} \end{cases}$$

ξ_n を d の $\alpha(n)$ への推測時の儲け額を $d(\alpha \upharpoonright n)$ で割ったもの，すなわち，それぞれの場合毎に，順に， $-\eta_n, \eta_n \cdot ((1 - p_n)/p_n), \eta_n \cdot (p_n/(1 - p_n))$ とする．帰納法によって，各 $n \in \mathbb{N}$ について，次の式を得る．

$$d(\alpha \upharpoonright n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \xi_k).$$

\vec{p} と \vec{q} は強正であることから，ある $\theta > 0$ で，各 p_i と q_i が $[\theta, 1 - \theta]$ に入るものを取れる． $m = \lceil 1/\theta \rceil$ とする．このとき，各 $n \in \mathbb{N}$ について $0 \leq 1/p_n, 1/(1 - p_n) \leq m$ なので， $\xi_n \in [-1, m]$ が分かる．もし $i = 0$ かつ d の $\alpha(n)$ への推測が正しい場合，次の不等式を得る：

$$\begin{aligned} d^*(\alpha \upharpoonright n + 1) - d^*(\alpha \upharpoonright n) &= \eta_n \frac{1 - q_n}{q_n} = \xi_n - \xi_n + \eta_n \frac{1 - q_n}{q_n} = \xi_n - \frac{\eta_n(q_n - p_n)}{p_n q_n} \\ &= \xi_n - \eta_n \cdot \frac{1 - p_n}{p_n} \cdot \frac{1}{(1 - p_n)q_n} \cdot (q_n - p_n) \\ &\geq \xi_n - \xi_n \cdot m^2(q_n - p_n) \geq \xi_n - m^2|\xi_n||p_n - q_n|. \end{aligned}$$

同様の不等式を，あらゆる場合について得ることができる．これより，帰納法によって，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，次の不等式を得る：

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k - \sum_{k=0}^{n-1} m^2|\xi_k||p_k - q_k| \leq d^*(\alpha \upharpoonright n).$$

定数 c を，任意の $\xi \in [-1, m]$ について $\log(1 + \xi) \leq \xi - c\xi^2$ なるものとする．このとき，以下の不等式が成立する：

$$\log d(\alpha \upharpoonright n) = \log \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \xi_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \log(1 + \xi_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k - c \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2.$$

いま, $\sum_{n=0}^{\infty} (p_i - q_i)^2 < \infty$ であるという仮定より, ある c^* で, 任意の $t \geq 0$ について次の不等式を満たすものが存在する:

$$m^2 \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} (p_i - q_i)^2} \cdot \sqrt{t} \leq ct + c^*.$$

このとき, コーシー-シュワルツの不等式より,

$$\sum_{k=0}^{n-1} m^2 |\xi_k| |p_k - q_k| \leq m^2 \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (p_i - q_i)^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2} \leq c \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 + c^*.$$

となるから, 次を得る:

$$\log d(\alpha \upharpoonright n) \leq d^*(\alpha \upharpoonright n) + c^*.$$

仮定より, $\lim_n d(\alpha \upharpoonright n) = \infty$ であるから, $\lim_n d^*(\alpha \upharpoonright n) = \infty$ が導かれる. これより, ある自然数 $b \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $d^*(\alpha \upharpoonright n) > -b$ となる. まず $d^{**} = d^* + \max\{c^*, b + 1\}$ によって定義し, d^* は基本的に d^{**} と同じ推測を行うが, d^{**} が資金を 1 未満に減らすような賭けを行う場合には, これに従わず, 何も賭けずに見送ることとする. このとき, d^* はマルチンゲールである. さらに, もし d が計算可能ならば d^* も計算可能であり, $\lim_n d^*(\alpha \upharpoonright n) = \infty$ が成立する. \square

結論. コインの歪み具合が少しでも違えば, 全く別のランダム性概念が現れる.

3.3 偏った数列の次元

問題設定. 大数の法則から, 100% の確率で, 0 と 1 の極限的な出現頻度は 1/2 になる. ということは, 0 と 1 の出現頻度が偏った無限列が得られる確率は 0% だってことだ. でも, たとえば, 0 と 1 の出現頻度が 1:3 となる列を生成するアルゴリズムなんて現実に幾らでも作れるだろう. それなら, 出現頻度が 1:3 の無限列は, 0% のうちのどれくらいの量を占めるだろうか? どうにかして「0% 以下の確率」の現象を調べる方法はあるだろうか?

ルベーク測度 0 より精密な物差しとして, ハウスドルフ測度の概念が知られている. この概念は, フラクタル幾何学などで頻繁に利用される. この発想は, 確率測度においても応用可能である.

定義 3.4 (ハウスドルフ測度 1917). 実数 $s \in [0, 1]$ を固定する. $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ の s 次元ハウスドルフ外測度 (s dimensional outer Hausdorff measure) は, 以下によって与えられる.

$$\lambda^s(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \sum_{\sigma \in S} 2^{-s|\sigma|} : A \subseteq [S], \text{ and } S \subseteq \{0, 1\}^{\geq n} \right\}.$$

長さ 1 の線分は、1 次元の世界では大きさ 1 を持つが、2 次元世界では大きさを認識できない、すなわち面積 0 であると言えるだろう。あるいは、一辺の長さ 1 の正方形は、面積 1 であるが、体積 0 であり、さらに、正方形を充填するには長さ ∞ の曲線が必要であるから、正方形は長さ ∞ であると考えられる。このように、ある図形が、本来あるべき次元より大きい次元にあるとき、その大きさは 0 であると認識され、本来あるべき次元より小さい次元にあるとき、その大きさは ∞ であると認識される。次の命題は、如何なる図形についても、0 以外の有限の大きさを取り得る次元は唯一であることを述べる。

命題 3.1. 任意の $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ について、次のような実数 $s \in [0, 1]$ が存在する：

1. 任意の $t \in [0, s)$ について、 $\lambda^t(A) = \infty$ である。
2. 任意の $t \in (s, 1]$ について、 $\lambda^t(A) = 0$ である。

定義 3.5 (ハウスドルフ次元 1917). 集合 $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ のハウスドルフ次元 (Hausdorff dimension) は次によって与えられる実数である。

$$\dim_H(A) = \inf\{s \in [0, 1] : \lambda^s(A) = 0\}.$$

命題 3.2. もし $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ が μ -可測ならば、 $\lambda(A) = \lambda^1(A)$ である。

さて、いま $\alpha \in A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ だということが分かっているとして、我々は α が何であるか知りたいとする。集合 A が小さければ小さいほど、 α が何であるかの候補が絞られている。すなわち、候補集合 A が小さく特定されていればいるほど、 α の値を予測しやすく、そして α の値当て賭博で儲けを得ることは容易となるであろう。さて、ハウスドルフ次元が 1 未満の集合は、単純に確率 0 であるというよりも、さらに小さい。Ville の定理 1.2 を思い出せば、確率 0 にまで候補を絞っていれば、好きなだけ儲けを出せるようなマルチンゲールを構成できた。それならば、ハウスドルフ次元 1 未満にまで候補を絞っていれば、更に儲けを出せると期待できる。

定義 3.6 (実効ハウスドルフ次元). 実数 $s \in [0, 1]$ および $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ について、 s 次元ハウスドルフ測度 $\lambda^s(A)$ が実効的に零であるとは、ある $\{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ の計算的枚挙可能集合列 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で、任意の $n \in \mathbb{N}$ について次を満たすものが存在するときを指す：

$$A \subseteq [S_n], \text{ かつ } \sum_{\sigma \in S_n} 2^{-s|\sigma|} \leq 2^{-n}.$$

このとき、集合 $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ の実効ハウスドルフ次元 (effective Hausdorff dimension) は次によって与えられる実数である。

$$\text{edim}_H(A) = \inf\{s \in [0, 1] : \lambda^s(A) \text{ は実効的に零である }\}.$$

また、実数 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ の実効ハウスドルフ次元は、 $\dim_H(\alpha) = \text{edim}_H(\{\alpha\})$ によって与えられる。

定理 3.8 (Lutz 2000). 集合 $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ と実数 $s \in [0, 1]$ について、次の 2 条件は同値である。

1. A の実効ハウスドルフ次元は s 以下である。
2. 次の条件を満たす下半計算可能マルチンゲール $d : \{0, 1\}^{<\mathbb{N}} \rightarrow [0, \infty)$ が存在する：

$$\text{任意の } \alpha \in A \text{ および } t > s \text{ について, } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d(\alpha \upharpoonright n)}{2^{(1-t)n}} = \infty.$$

証明. (1) \Rightarrow (2): $s > \dim_H(A)$ を満たす実数 s を任意に取る. このとき, $\lambda^s(A) = 0$ であるから, ある計数的枚挙可能集合列 $\{[U_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して, 各 $n \in \mathbb{N}$ について, 次の性質が満たされる.

$$A \subseteq [U_n], \text{ かつ } \sum_{\sigma \in U_n} 2^{-s|\sigma|} \leq 2^{-n}.$$

ここで, U_n は反鎖とすることができる. Ville の定理 1.2 のように, マルチンゲール d_n は U_n の条件付確率を模倣する. 各 $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ について, U_n^σ を, $\tau \succeq \sigma$ なる $\tau \in U_n$ 全体の集合とする. このとき, $d_n(\sigma)$ として, 初期資金 $d_n(\langle \rangle) = \sum_{\sigma \in U_n} 2^{-s|\sigma|}$ であるような次の条件を満たすマルチンゲールを考える:

$$d_n(\sigma) = \begin{cases} 2^{|\sigma|} \sum_{\tau \in U_n^\sigma} 2^{-s|\tau|}, & \text{if } U_n^\sigma \neq \emptyset, \\ 2^{(1-s)m}, & \text{if } \sigma \upharpoonright m \in U_n \text{ for } m < |\sigma|, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき, $d(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\sigma)$ によって定義する. 明らかに d は下半計算可能マルチンゲールである. もし $\alpha \in A$ ならば, $A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ であるから, 任意の $k \in \mathbb{N}$ について, $\alpha \upharpoonright n_k \in U_k$ なる $n_k \in \mathbb{N}$ が存在する. このとき, 任意の実数 $t > s$ について,

$$\frac{d(\alpha \upharpoonright n_k)}{2^{(1-t)n_k}} \geq \frac{d_k(\alpha \upharpoonright n_k)}{2^{(1-t)n_k}} = \frac{2^{(1-s)n_k}}{2^{(1-t)n_k}} = 2^{(t-s)n_k}$$

であるから, 次を得る.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d(\alpha \upharpoonright n)}{2^{(1-t)n}} = \infty.$$

(2) \Rightarrow (1): いま, 任意の実数 $t > s$ を固定する. 各 $k \in \mathbb{N}$ について, $V_k \subseteq \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ を次によって定義する.

$$V_k = \left\{ \sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}} : \frac{d(\sigma)}{2^{(1-t)|\sigma|}} \geq 2^k \right\}.$$

このとき, U_k を V_k の極小元のなす反鎖とする. つまり, U_k として, 任意の $\tau \prec \sigma$ について $\tau \in V_k$ であるような $\sigma \in V_k$ 全体の集合とする. このとき, 次の不等式を得る.

$$\sum_{\sigma \in U_k} 2^{-t|\sigma|} \leq 2^{-k} \cdot \sum_{\sigma \in U_k} 2^{-t|\sigma|} \frac{d(\sigma)}{2^{(1-t)|\sigma|}} = 2^{-k} \cdot \sum_{\sigma \in U_k} 2^{-|\sigma|} d(\sigma) \leq 2^{-k}$$

ここで, 最後の不等式は, 定理 1.1 の証明中の主張による. 主張 (2) の仮定より, $A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [U_n]$ であるから, $\lambda^t(A)$ は実効的に零である. $t > s$ は任意なので, $\text{edim}_H(A) \leq s$ を得る. \square

定理 3.9 (Ryabko 1984; Mayordomo 2002). 実数 $A \subseteq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ について, 次の式が成立する ..

$$\text{edim}_H(A) = \sup_{\alpha \in A} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\alpha \upharpoonright n)}{n}.$$

証明. まず, 任意の $\alpha \in A$ に対して $\liminf_{n \rightarrow \infty} K(\alpha \upharpoonright n)/n < s$ を満たす有理数 $s \in \mathbb{Q}$ を任意に取る. このとき, 任意の $k \in \mathbb{N}$ について, 無限個の $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $K(\alpha \upharpoonright n) \leq sn - k$ が成立する. 任意の $k \in \mathbb{N}$ について,

$$U_k = \{ \sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}} : K(\sigma) \leq s|\sigma| - k \}$$

と定義すれば, $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は計算的枚挙可能集合列である. 系 1.2 より, 次を得る.

$$\sum_{\sigma \in U_k} 2^{-(s|\sigma|-k)} \leq \sum_{\sigma \in U_k} 2^{-K(\sigma)} \leq 1.$$

これより, $\sum_{\sigma \in U_k} 2^{-s|\sigma|} \leq 2^{-k}$ であり, $A \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [U_k]$ であるから, $\text{edim}_H(A) \leq s$ を得る.

逆に, $\text{edim}_H(A) < s$ なる有理数 $s \in \mathbb{Q}$ を取る. このとき, $\{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ の計算的枚挙可能集合列 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で, $A \subseteq \bigcap_n [U_n]$ かつ $\sum_{\sigma \in U_n} 2^{-s|\sigma|} \leq 2^{-n}$ を満たすものが存在する. もし, $\sigma \in \bigcup_{n \geq 1} U_n$ であることが分かったら, 依頼 $(\sigma, s|\sigma|)$ を依頼状 L に書く. このとき,

$$\sum_{(\sigma, r) \in L} 2^{-r} = \sum_{\sigma \in \bigcup_{n \geq 1} U_n} 2^{-s|\sigma|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\sigma \in U_n} 2^{-s|\sigma|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

であるから, 機械存在補題 2.1 より, 全ての依頼 $(\sigma, s|\sigma|)$ は達成され, ある定数 $c \in \mathbb{N}$ が存在して, 各 $\sigma \in \bigcup_{n \geq 1} U_n$ について, $K(\sigma) \leq s|\sigma| + c$ を得る. 任意の $\alpha \in A$ に対して, 無限個の $t \in \mathbb{N}$ が存在して, $\alpha \upharpoonright t \in \bigcup_{n \geq 1} U_n$ を満たすから,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\alpha \upharpoonright n)}{n} \leq s$$

を得る. 以上の議論を合わせれば, 目的の等式を得る. □

系 3.1 (Mayordomo 2002). 無限列 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ について, 次の式が成立する.

$$\dim_H(\alpha) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\alpha \upharpoonright n)}{n}.$$

結論. 確率 0% 以下の現象を調べるためには, 1 次元の確率ではなく, 次元をずらして非整数次元の確率を調べるのが有効である. このために用いられるハウスドルフ次元の概念は, コルモゴロフ複雑性の極限的増大率, つまり圧縮率と密接に結び付いている.

3.4 エントロピーとハウスドルフ次元

結論. 歪んだコインから得られるランダム列 α は, 当然ながら 0 と 1 の出現頻度が偏っており, 公平なコイン投げの意味ではランダムではない. したがって, 多くの有限部分 $\alpha \upharpoonright n$ をより短い列に圧縮できるだろう. では, 具体的には, 我々はこのランダム列 α をどれくらい圧縮できるだろうか?

定義 3.7 (Shannon 1948). 実数 $p \in [0, 1]$ のシャノン・エントロピー (*Shannon entropy*) とは, 次によって定義される実数 $\mathcal{H}(p) \in [0, 1]$ である.

$$\mathcal{H}(p) = -p \log p - (1-p) \log(1-p).$$

定理 3.10 (Lutz 2000). 任意の無限列 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ および実数 $p \in [0, 1]$ について, もし $\text{Freq}(\alpha) = p$ ならば, α の実効ハウスドルフ次元は $\mathcal{H}(p)$ 以下である. つまり, 以下の条件を満たす.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\alpha \upharpoonright n)}{n} \leq \mathcal{H}(p).$$

証明. $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ と $i \in \{0, 1\}$ が与えられたとき, $\#i(\sigma)$ で, $\sigma(n) = i$ なる $n \leq |\sigma|$ の数を表す. いま, $p = 1/2$ の場合は自明なので, $p > 1/2$ と仮定して一般性を失わない. $\delta \in (0, p - 1/2]$ を任意の有理数とする. $\text{Freq}(\alpha) = p \geq 1/2 + \delta$ なので, 次が成立する.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\#0(\alpha \upharpoonright n)}{n} \geq \frac{1}{2} + \delta.$$

マルチンゲール d を, 常に次の値が 0 であることに現在資金の 2δ 倍を賭ける戦略によって与える. つまり,

$$d(\alpha \upharpoonright n) = (1 + 2\delta)^{\#0(\alpha \upharpoonright n)} \cdot (1 - 2\delta)^{\#1(\alpha \upharpoonright n)}$$

とする. このとき, 次の等式が導かれる.

$$\begin{aligned} \frac{\log d(\alpha \upharpoonright n)}{n} &= \frac{\#0(\alpha \upharpoonright n)}{n} \log(1 + 2\delta) + \frac{\#1(\alpha \upharpoonright n)}{n} \log(1 - 2\delta) \\ &= 1 + \frac{\#0(\alpha \upharpoonright n)}{n} \log\left(\frac{1}{2} + \delta\right) + \frac{\#1(\alpha \upharpoonright n)}{n} \log\left(\frac{1}{2} - \delta\right). \end{aligned}$$

いま, $p \geq 1/2 + \delta$ なので, これより,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d(\alpha \upharpoonright n)}{n} \geq 1 + \left(\frac{1}{2} + \delta\right) \log\left(\frac{1}{2} + \delta\right) + \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \log\left(\frac{1}{2} - \delta\right) = 1 - \mathcal{H}\left(\frac{1}{2} + \delta\right)$$

を得る. 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, $1/2 + \delta$ が十分 p に近いような δ を取れば, $\mathcal{H}(1/2 + \delta) < \mathcal{H}(p) + \varepsilon$ が成立する. このような $\delta \in (0, p - 1/2]$ に対して,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\log d(\alpha \upharpoonright n) - n(1 - \mathcal{H}(p) - \varepsilon)) = \infty$$

であるから, 次の式が成立する.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d(\alpha \upharpoonright n)}{2^{n(1 - \mathcal{H}(p) - \varepsilon)}} = \infty.$$

定数 $\varepsilon > 0$ は任意なので, これより, α の実効ハウスドルフ次元は $\mathcal{H}(p)$ 以下である. □

定理 3.11 (Lutz 2003). $p \in (0, 1)$ を任意の計算可能実数とし, λ_p をバイアス p のベルヌーイ測度とする. このとき, 無限列 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ が λ_p -ランダムならば, α の実効ハウスドルフ次元は, p のシャノン・エントロピー $\mathcal{H}(p)$ に等しい. つまり, 以下の性質を満たす.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\alpha \upharpoonright n)}{n} = \mathcal{H}(p).$$

証明. α が λ_p -ランダムならば, Borel の強大数の法則 1.3 を分析すると, $\text{Freq}(\xi) \neq p$ なる $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ 全体の集合は実効的に λ_p -零であることが分かる. これより, $\text{Freq}(\alpha) = p$ であることが示される. よって, 定理 3.10 より, $\dim_H(\alpha) \leq \mathcal{H}(p)$ が成立する. 後は $\dim_H(\alpha) \geq \mathcal{H}(p)$ を示せばよい. 任意の計算可能な正実数 $s < \mathcal{H}(p)$ を固定する. いま, マルチンゲール d を任意に取る. この λ -マルチンゲールと同じ方に同じ割合の額を賭けていく場合の, λ_p による資金過程 d_p を考える. つまり, λ_p -マルチンゲール d_p を, 任意の $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ について, 次によって定義する:

$$d_p(\sigma) = \frac{2^{-|\sigma|}}{\lambda_p(\llbracket \sigma \rrbracket)} d(\sigma).$$

いま, $\log \lambda_p(\llbracket \sigma \rrbracket) = \#0(\sigma) \log p + \#1(\sigma) \log(1-p)$ であることに注意する. ここで, $\#i(\sigma)$ によって $\sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ 中に出現する $i \in \{0, 1\}$ の総数を表す. もし $\text{Freq}(\alpha) = p$ ならば, $\#0(\alpha \upharpoonright n)/n$ は p に収束するから, $\log \lambda_p(\llbracket \alpha \upharpoonright n \rrbracket)/n$ は $-\mathcal{H}(p)$ に収束する. これより, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ について, $sn + \log \lambda_p(\llbracket \alpha \upharpoonright n \rrbracket) < 0$ を得る. このような $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$d_p(\alpha \upharpoonright n) = \frac{2^{-n}}{\lambda_p(\llbracket \alpha \upharpoonright n \rrbracket)} d(\alpha \upharpoonright n) = \frac{1}{2^{sn + \log \lambda_p(\llbracket \alpha \upharpoonright n \rrbracket)}} \cdot \frac{d(\alpha \upharpoonright n)}{2^{(1-s)n}} > \frac{d(\alpha \upharpoonright n)}{2^{(1-s)n}}$$

が成立する. α は λ_p -ランダムなので, $\limsup_{n \rightarrow \infty} d_p(\alpha \upharpoonright n) < \infty$ であるから, 右辺の上極限の値も有限に収束する. また, $s < \mathcal{H}(p)$ は任意なので, 定理 3.8 より, $\dim_H(\alpha) \geq \mathcal{H}(p)$ を得る. \square

系 3.2 (Eggleston の定理 1949). 各 $p \in [0, 1]$ について, $\{\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \text{Freq}(\alpha) = p\}$ のハウスドルフ次元は $\mathcal{H}(p)$ である.

問題設定. 歪んだコインから得られるランダム列のコルモゴロフ複雑性の極限的振る舞い, すなわち実効ハウスドルフ次元は, シヤノン・エントロピーと同じ値を取る.

3.5 超越数論とランダムネス

問題設定. 実数を 2 進展開することにより, 実数 $0.\alpha \in [0, 1]$ と 0 と 1 の無限列 $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ を同一視することができる. したがって, 無限列のランダムネスの理論は, 実数のランダムネスの理論でもある. それならば, ある種の実数のコルモゴロフ複雑性を, 具体的に計算してみよう!

定義 3.8. 実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\text{Ir}(\alpha)$ を次の条件を満たす $r \in \mathbb{R}$ 全体の集合とする: 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある定数 $c > 1$ が存在して, 任意の自然数 $p \leq q$ で $q \geq c$ なるものについて, r は次の不等式を満たす:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{r+\varepsilon}}.$$

実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ の無理数度 (irrationality measure) とは, $\inf \text{Ir}(\alpha)$ によって定義される値である. ここで, $\inf \emptyset = \infty$ と定義される. 無理数度 ∞ の無理数はリウヴィル数 (Liouville number) と呼ばれる.

定理 3.12 (Staiger 1999). 任意のリウヴィル数 $\alpha \in \mathbb{R}$ は, 実効ハウスドルフ次元 0 である. つまり, 次の等式が成立する.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\alpha \upharpoonright n)}{n} = 0.$$

証明. 与えられた $n \in \mathbb{N}$ に対して, コルモゴロフ複雑性に関する次の不等式を成立させる $l \geq n$ が存在することを示せば十分である.

$$\frac{K(\alpha \upharpoonright l)}{l} \leq \frac{\log n}{n}.$$

リウヴィル数をまとめて圧縮する機械を構成する. もし $\beta \in [0, 1]$ がリウヴィル数ならば, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $|\beta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$ なる自然数 $0 \leq p \leq q$ が存在する. このとき, $[0, 1]$ の q 分割のある格子点周辺の幅 $\frac{2}{q^n}$ の区間 $J_{n,p,q} = [\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n}]$ に β は含まれている. $2^m \leq \frac{q^n}{2}$ なる最大の $m \in \mathbb{N}$ を取る. このとき, $m = \lfloor n \log q - 1 \rfloor$ であることに注意する. $[0, 1]$ を 2^m 分割したときの幅は, $J_{n,p,q}$ の幅より大きいので, 2つのブロックで $J_{n,p,q}$ を被覆できるので, それぞれの左端の点を $p_0(n, p, q)$ と $p_1(n, p, q)$ と書く. いま, ブロックは 2^{-m} 刻みであるので, $p_0(n, p, q)$ または $p_1(n, p, q)$ は, $\beta \upharpoonright m = \beta \upharpoonright \lfloor n \log q - 1 \rfloor$ を表すに違いない.

いま, $p_i(n, p, q)$ は β の位置に依存せず, (n, p, q) の値のみによって決まるから, 各 (n, p, q) から $p_i(n, p, q)$ の値は計算可能である. このとき, $[i, n, p, q]$ のような文字列で $p_i(n, p, q)$ を記述することを考える. たとえば, コンマを 11 で表記し, 数字 $i < 2$ を $0i$ で表記すると考えても, これは長さ $2 + 2 \log n + 2 \log p + 2 \log q$ 程度の文字列で記述できる. $p \leq q$ であるから, $2 + 2 \log n + 4 \log q$ 以下であると考えてよい. これより, もし β がリウヴィル数ならば, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ について,

$$\frac{C(\beta \upharpoonright \lfloor n \log q - 1 \rfloor)}{\lfloor n \log q - 1 \rfloor} \leq \frac{2 + 2 \log n + 4 \log q}{\lfloor n \log q - 1 \rfloor} \leq \frac{2}{\log q} \cdot \frac{\log n}{n}.$$

β が無理数でないとき, n が無限大に発散するならば, q も無限大に発散するので, β の実効ハウスドルフ次元は 0 に収束する. □

系 3.3 (Oxtoby 1971). リウヴィル数全体の集合はハウスドルフ次元 0 である.

結論. どんなリウヴィル数も実効ハウスドルフ次元 0 であることを示せた. 本稿では触れないが, ランダムネスの理論においてその他様々な次元概念がある. 本節の結果とは対照的に, 実はリウヴィル数は, 正の有限状態次元 (*finite state dimension*) を取り得る. これを利用して, たとえば正規リウヴィル数の初等的構成を実現できる.

第 6 章

力学系とエントロピー

6.1 次元 = エントロピー = 複雑性

問題設定 . さて, “普通の図形” に対しては, 位相次元とハウスドルフ次元は等しい. 同様に, 実効ハウスドルフ次元もまた等しい. また, フラクタル幾何学で扱われるような “普通のフラクタル図形” に対しては, ハウスドルフ次元と実効ハウスドルフ次元は等しい. これより, フラクタル図形の次元を, コルモゴロフ複雑性の計算によって求めることが可能になる. では, 少しフラクタル図形とは少し異なる対象であるが, ある種の力学系に関しては, その位相エントロピーやハウスドルフ次元を, コルモゴロフ複雑性から求めることが可能であるという.

以後, 自然数 $k \in \mathbb{N}$ について, $\mathbf{k} = \{0, 1, \dots, k-1\}$ とする. コンパクト空間 X と, X 上の連続関数 $T: X \rightarrow X$ の組 (X, T) を連続力学系 (*continuous dynamical system*) と呼ぶ. ここでは, 各点 $x \in X$ の軌道の長期挙動 $(T^n(x) : n \in \mathbb{N})$ に焦点を当てよう. 力学系のエントロピーは, 指数的増大率を定量化するために用いられる.

力学系 (X, T) を研究する方法の 1 つとして, それに記号力学系 (*symbolic dynamical system*) を対応させるという方法がある. これは, X を有限個の領域 $(X_i)_{i < k}$ に分割し, 各点 $x \in X$ の軌道 $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ の代わりに, 各時刻で訪れる領域の番号の列 $\text{It}(x) = (i[x; n] : n \in \mathbb{N}) \in \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ を見るというものである. ここで, $T^n(x) \in X_i$ なる i を $i[x; n]$ とする. とところで, $i[T(x); n] = i[x; n+1]$ であるから, T は $\mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ 上のシフト写像 (*shift map*) $\text{sh} : \mathbf{k}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ に対応する. つまり, 各 $\alpha \in \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ について $\text{sh}(\alpha)(n) = \alpha(n+1)$ によって定義される写像である. この $\text{It}_{X,T} = \{\text{It}(x) : x \in X\}$ と sh の組 $(\text{It}_{X,T}, \text{sh})$ は代表的な記号力学系である.

定義 6.1 (位相エントロピー; Adler/Konheim/McAndrew 1965). コンパクト空間 X の開被覆 \mathcal{U} のエントロピーとは, 次によって与えられる値である.

$$\mathcal{H}_X(\mathcal{U}) = \log \min\{\#\mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}, \text{ and } X \subseteq \bigcup \mathcal{F}\}.$$

いま, X の開被覆 \mathcal{U} と \mathcal{V} が与えられているとき,

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, \text{ and } V \in \mathcal{V}\}$$

とし, $T^{-1}\mathcal{U} = \{T^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ によって定義する. このとき, 任意の連続関数 $T: X \rightarrow X$ に対して, 次

の極限值は存在する .

$$\mathcal{H}(X, T, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{H}_X(\mathcal{U} \vee T^{-1}\mathcal{U} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{U}).$$

このとき , 力学系 (X, T) の位相エントロピー (topological entropy) は , 次によって定義される :

$$\text{ent}(X, T) = \sup\{\mathcal{H}(X, T, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ は } X \text{ の開被覆である } \}.$$

定義 6.2. 集合 $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ がシフト不変 (shift invariant) であるとは , 任意の $n \in \mathbb{N}$ および $\alpha \in S$ に対して , $\text{sh}^n(\alpha) \in S$ であるときを言う . 集合 $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ がサブシフト (subshift) であるとは , S が $\mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ の空でない閉部分集合であり , シフト不変であるときを言う .

$S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ がサブシフトであるとき , $(S, \text{sh}|_S)$ はコンパクト力学系である . このとき , 単に $\text{ent}(S) = \text{ent}(S, \text{sh}|_S)$ と書く .

補題 6.1. $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ がサブシフトであるならば , 位相エントロピーは次によって与えられる :

$$\text{ent}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#\{\alpha \upharpoonright n : \alpha \in S\})}{n}$$

定理 6.1 (Simpson 201x). $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ をサブシフトとする . このとき , 次の等式が成立する :

$$\text{ent}(S) = \dim_H(S) = \sup_{\alpha \in S} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\alpha \upharpoonright n)}{n}$$

補題 6.2. $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ がサブシフトならば , $\dim_H(S) = \text{edim}_H(S)$ である .

証明. $\dim_H(S) \leq \text{edim}_H(S)$ であることは明らかである . 一方 , S の s 次元ハウスドルフ測度が 0 ならば , S のコンパクト性と合わせて , 次のような有限集合 $I \subseteq \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ が存在する :

$$S \subseteq \bigcup_{\sigma \in I} [\sigma], \text{ かつ } \sum_{\sigma \in I} 2^{-s|\sigma|} \leq \frac{1}{2}.$$

$I^{(k)}$ を I の要素の k 個の組合せから構成される有限列全体の集合とする , すなわち $I^{(k)} = \{\sigma_1 \frown \dots \frown \sigma_k : \sigma_1, \dots, \sigma_k \in I\}$ によって定義する . このとき , S がサブシフトであることから , $\alpha \in S$ が $\sigma \frown \alpha^*$ と表されるとき , $\alpha^* \in S$ である . したがって , I が S を被覆することから , 任意の $\sigma \prec \alpha$ に対して , ある $\tau \in I$ が存在して , $\alpha \in [\sigma \frown \tau]$ を満たす . これより , 任意の $k \in \mathbb{N}$ について $S \subseteq [I^{(k)}]$ である . さらに ,

$$\sum_{\sigma \in I^{(k)}} 2^{-s|\sigma|} = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in I^k} 2^{-s(|\sigma_1| + \dots + |\sigma_k|)} = \left(\sum_{\sigma_1 \in I} 2^{-s|\sigma_1|} \right) \dots \left(\sum_{\sigma_k \in I} 2^{-s|\sigma_k|} \right) = \left(\sum_{\sigma \in I} 2^{-s|\sigma|} \right)^k \leq 2^{-k}$$

が成立する . また , I が有限集合列であることから $\{I^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ は計算的枚挙可能集合列なので , S の s 次元ハウスドルフ測度は実効的に零である . よって , $\text{edim}_H(S) \leq \dim_H(S)$ を得る . \square

定理 6.2 (Furstenberg 1967). $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ がサブシフトならば, $\text{ent}(S) = \dim_H(S)$ である.

補題 6.3. 任意のサブシフト $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ について, $\text{ent}(S) \geq \dim_H(S)$ である.

証明 (定理 6.2). いま, \mathcal{U} を S の有限被覆とする. このとき, ある有限集合 $I \subseteq \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ が存在して, $\mathcal{U} = \{[\sigma] : \sigma \in I\}$ を満たすと仮定して一般性を失わない. \mathcal{U} が被覆であり, S がサブシフトであることから, 任意の $\alpha \in S$ に対して, I の要素の列 $\{\sigma_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq I$ が存在して,

$$\alpha = \sigma_0 \hat{\ } \sigma_1 \hat{\ } \sigma_2 \hat{\ } \dots$$

と表すことができる. このとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ について, 次のような $k \in \mathbb{N}$ を取る.

$$\sigma_0 \hat{\ } \dots \hat{\ } \sigma_{k-1} < \alpha \upharpoonright n \preceq \sigma_0 \hat{\ } \dots \hat{\ } \sigma_k.$$

$m = \max\{|\sigma| : \sigma \in I\}$ とすれば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $S \upharpoonright n$ は, I の有限個の組合せで, 長さが $n+m$ 未満のものだけを用いて網羅することができる.

いま, S の s 次元ハウスドルフ測度が 0 であると仮定する. このとき, S の位相エントロピーが s 以下であることを示せばよい. つまり, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-sn} \#S \upharpoonright n$ が有界であることを示す. さて, $\lambda^s(S) = 0$ および S のコンパクト性より, 次のような有限集合 $I \subseteq \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ が存在する:

$$S \subseteq \bigcup_{\sigma \in I} [\sigma], \text{ かつ } \sum_{\sigma \in I} 2^{-s|\sigma|} < 1.$$

このとき, スケール s での I の要素の有限組合せ全体の重みは次のように有界であることが分かる:

$$\sum_{(\sigma_0, \dots, \sigma_k) \in I^{<\mathbb{N}}} 2^{-s(|\sigma_0| + \dots + |\sigma_k|)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\sigma \in I} 2^{-s|\sigma|} \right)^j < \infty$$

この有限の値を M とおく. $S \upharpoonright n$ の各要素に対して, I の要素の有限組合せ $(\sigma_0, \dots, \sigma_k)$ が対応し, さらに $2^{-sn} < 2^{ms} 2^{-s(|\sigma_0| + \dots + |\sigma_k|)}$ が満たされる. これより, $2^{-sn} \#S \upharpoonright n < 2^{ms} M$ が成立する. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-sn} \#S \upharpoonright n$ が有界となることから, $\text{ent}(S) \leq s$ となることが示された. \square

証明 (定理 6.1). 定理 3.9, 補題 6.2, および定理 6.2 による. \square

定義 6.3 (測度論的エントロピー). (X, μ) を確率空間とする. 関数 $T : X \rightarrow X$ が保測 (*measure-preserving*) であるとは, 任意の μ -可測集合 $P \subseteq X$ に対して $\mu(T^{-1}(P)) = \mu(P)$ を満たすことである. このような組 (X, T, μ) を保測力学系 (*measure-preserving dynamical system*) と呼ぶ. 空間 X の μ -可測集合による有限分割 \mathcal{P} を可測分割と呼ぶ. 可測分割 \mathcal{P} のエントロピーを次によって定義する:

$$\mathcal{H}_{X, \mu}(\mathcal{P}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P).$$

いま, \mathcal{P} と \mathcal{Q} が X の可測分割ならば, $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ や $T^{-1}(\mathcal{P})$ は以前と同様にして定義される. このとき,

$$\mathcal{H}(X, T, \mu, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{H}_{X, \mu}(\mathcal{P} \vee T^{-1}\mathcal{P} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{P})$$

としたとき，保測力学系 (X, T, μ) の測度論的エントロピー (*measure-theoretic entropy*) とは，次によって定義される値である：

$$\text{ent}(X, T, \mu) = \sup\{\mathcal{H}(X, T, \mu, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ は } X \text{ の可測分割である}\}.$$

定義 6.4. $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ をサブシフトとする． S 上のボレル確率測度 μ がエルゴード的 (*ergodic*) とは，任意の μ -可測集合 $P \subseteq S$ で $\text{sh}^{-1}(P) \subseteq P$ なるものについて， $\mu(P) \in \{0, 1\}$ となることである． μ がシフト不変 (*shift-invariant*) であるとは，任意のボレル集合 $P \subseteq S$ に対して， $\mu(\text{sh}^{-1}(P)) = \mu(P)$ となるときを言う．この場合， $(S, \text{sh}|_S, \mu)$ は保測力学系となり，その測度論的エントロピーを単に $\text{ent}(S, \mu)$ と書く．

定理 6.3 (Shannon/McMillan/Breiman). $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ がサブシフトで， μ が S 上のエルゴード的シフト不変確率測度であるならば， μ -殆ど全ての $\alpha \in S$ について，次の等式が成立する：

$$\text{ent}(S, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \mu(\llbracket \alpha \upharpoonright n \rrbracket)}{n}. \quad \square$$

定理 6.4 (変分原理). 任意のサブシフト $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ に対して，次が成立する．

$$\text{ent}(S) = \max\{\text{ent}(S, \mu) : \mu \text{ は } \mathbf{k}^{\mathbb{N}} \text{ 上のエルゴード的シフト不変確率測度である}\}. \quad \square$$

定理 6.5 (Simpson 201x). $S \subseteq \mathbf{k}^{\mathbb{N}}$ をサブシフトとする．このとき，次の等式を満たす一点 $\alpha \in S$ が存在する．

$$\text{ent}(S) = \dim_H(S) = \dim_H(\alpha) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\alpha \upharpoonright n)}{n}.$$

証明. 変分原理 6.4 より， S 上のあるエルゴード的シフト不変確率測度 μ で， $\text{ent}(S) = \text{ent}(S, \mu)$ となるものが存在する．実数 $s < \text{ent}(S)$ を任意に取る．いま， $s + \varepsilon < \text{ent}(S)$ なる正実数 $\varepsilon > 0$ を任意に取る．このとき，Shannon/McMillan/Breiman の定理 6.3 より， μ -殆ど全ての $\alpha \in S$ と十分大きい任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\frac{-\log \mu(\llbracket \alpha \upharpoonright n \rrbracket)}{n} > s + \varepsilon$$

が成立する．よって，

$$T_n = \{\sigma \in \mathbf{k}^n : \mu(\llbracket \sigma \rrbracket) < 2^{-(s+\varepsilon)|\sigma|}\}$$

と定義すると， μ -殆ど全ての $\alpha \in S$ に対して，十分大きな $n \in \mathbb{N}$ について $\alpha \in [T_n]$ である．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，次の集合 U_n を考える：

$$U_n = \{\sigma \in \mathbf{k}^n : K(\sigma) < s|\sigma|\}.$$

このとき，明らかに $\#U_n \leq 2^{sn}$ である．よって，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\mu([U_n] \cap [T_n]) = \mu([U_n \cap T_n]) < 2^{sn} 2^{-(s+\varepsilon)n} = 2^{-\varepsilon n}$$

が成立するから，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu([U_n] \cap [T_n]) < \infty$$

を得る。ボレル/カンテリの補題より、 μ -殆ど全ての $\alpha \in S$ と十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\alpha \notin [U_n] \cap [T_n]$ である。これより、 μ -殆ど全ての $\alpha \in S$ と十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\alpha \notin [U_n]$ を得る。つまり、 $K(\alpha \upharpoonright n) \geq sn$ である。任意の $s < \text{ent}(S)$ について、次の集合 Q_s を考える：

$$Q_s = \{\alpha \in S : (\exists c \in \mathbb{N})(\forall n) K(\alpha \upharpoonright n) \geq sn - c\}.$$

ここまで、任意の $s < \text{ent}(S)$ について、 $\mu(Q_s) = 1$ であることを示した。よって、

$$Q = \bigcap \{Q_s : s \in \mathbb{Q}, \text{ and } s < \text{ent}(S)\}$$

は μ -測度 1 であり、定理 3.9 より、任意の $\alpha \in Q \subseteq S$ は $\text{ent}(S) \leq \dim_H(\alpha)$ を満たす。明らかに $\dim_H(\alpha) \leq \text{edim}_H(S)$ であるから、定理 6.1 と組み合わせることによって、目的の等式を得る。□

結論。サブシフトと呼ばれる特殊な力学系においては、その空間の位相エントロピーやハウスドルフ次元といった大域的情報は、その空間内のたった一点に全て取り込まれる。つまり、サブシフトの位相エントロピーとハウスドルフ次元を求めるためには、その空間内の具体的な一点の圧縮率、すなわち実効ハウスドルフ次元、を求めればよい。