

圏と論理へのいざない・レクチャーノート

木原 貴行

名古屋大学 情報学部・情報学研究科

最終更新日: 2020年4月3日

目次

1	グラフ, オートマトン, モノイド, 圏	3
2	極限と余極限	16
3	自由代数, 等式理論, ローヴェア理論	29
4	モノイド, モノイダル, モナド	51
5	普遍射, 随伴, そしてモナド	73
6	アイレンベルグ-ムーア代数	89
7	圏論による論理学	96
8	補遺, あとがき, 参考文献	108

まえがき

本レクチャーノートは、元々は名古屋大学情報学部の講義のために作成した講義ノートを拡張したものである。情報学部の講義であったため、理論計算機科学や数理論理学に少し寄った解説をしているが、情報系の特別な知識は要求しない。たとえば、最初の節では、グラフやオートマトンを例に出しているが、その特別な性質は一切用いないので、グラフ理論やオートマトン理論を知っている必要もない。

本稿を読むためには、数学系学科の学部初年度程度の集合算の知識（商集合など）と、代数学についてちょっと聞き齧ったことがある（たとえば群の概念を知っている）程度の知識があれば十分である。定義を聞いたことがある程度で十分であり、群論などの知識は要求しない。また、線形代数、微積分、位相空間論などの知識も一切要求しない。論理学の知識が少しあると読みやすいと思うが、本稿内で解説されるので、必ずしも事前に知っている必要はない。

つまり、数学科向けの圏論の入門書と比べると、可能な限り必要な前提知識を削ったつもりである。必要な予備知識を最低限に抑えながら、「定義・定理・証明」も厳密にしっかりと述べることを目指して執筆した。ただし、他の入門的文献との差別化のために、「数理論理学の視点」を強調している。

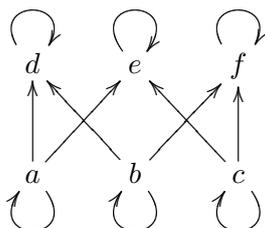
§ 1. グラフ, オートマトン, モノイド, 圏

1.1. グラフ理論の基礎

グラフ (*graph*) とは集合 V と $E \subseteq V \times V$ の対 (V, E) のことを指す. 各 $v \in V$ のことを頂点 (*vertex*) といい, 各 $e = (v_0, v_1) \in E$ のことを辺 (*edge*) と呼ぶ. つまり, $(v_0, v_1) \in E$ のとき, 頂点 v_0 と v_1 が辺で結ばれていると考える. v_0 と v_1 の順序も気にする場合には, これを有向グラフ (*directed graph*) と呼ぶ. つまり, $(v_0, v_1) \in E$ とは, 頂点 v_0 から v_1 への (向き付けられた) 辺があることを意味する. 辺 $e = (v_0, v_1)$ の始点 v_0 を $\text{dom}(e)$ と書き, 終点を $\text{cod}(e)$ と書く.

$$\text{dom}(e) = v_0 \bullet \xrightarrow{e} \bullet v_1 = \text{cod}(e)$$

さて, われわれは色々な数学的対象をグラフで表すことがある. たとえば, 半順序が与えられたとき, $x \leq y$ ならば, 大きな元 y を上に, 小さな元 x を下に配置して, x と y を辺で繋いだグラフを無意識に描く, という人も多いかもしれない. これはいわゆる半順序のハッセ図 (*Hasse diagram*) と呼ばれるものである. 本稿では, 数学的厳密さのために, $x \leq y$ のときは $x \rightarrow y$ というように有向辺で繋ぐことにする.



形式的な定義としては V 上の 2 項関係 E について, 以下の概念を考える.

- E が反射的 (*reflexive*) とは, 任意の $x \in V$ について $(x, x) \in E$ であることを意味する.
- E が推移的 (*transitive*) とは, $(x, y) \in E$ かつ $(y, z) \in E$ ならば $(x, z) \in E$ であることを意味する.

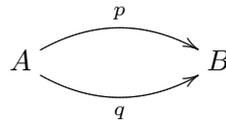
反射的かつ推移的な 2 項関係は前順序 (*preorder*) と呼ばれる. 前順序の場合は, $(x, y) \in E$ と書く代わりに $x \leq y$ と書くことが多い. さて, 反射律より, 任意の p について $p \leq p$ であるので, ハッセ図において, すべての頂点は自己ループを持つことに注意する. ただし, 日常的な文脈では, ハッセ図を描くときには自己ループを省略するのが普通である. また, ハッセ図というと, 通常は有限半順序に対するものを指すらしいが, 有限に制限することに全く数学的意味がないので, 本稿では無限のハッセ図も取り扱う. また, グラフについても, 無限個の頂点や無限個の辺を持ちうる. これについては, グラフと聞けばまずは無限グラフを思い浮かべる人も多いから, あまり抵抗はないと思われる.

半順序のハッセ図に似たグラフとしては, 論理式の導出を矢印 (辺) によって表すグラフがある.

例 1.1 (論理式のグラフ). 頂点を論理式とする有向グラフを考える. ここで, A を仮定すれば B を証明できるとき, 頂点 A から B へ向かう辺があるとす. つまり,

$$V = \{ \text{論理式全体} \}; \quad E = \{ (A, B) \in V^2 : A \text{ を仮定すれば } B \text{ を証明できる} \}.$$

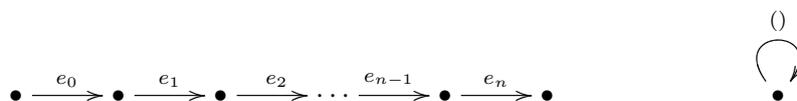
上の例における論理式のグラフでは、単に証明可能性のみを考えているが、論理式の構造を深く知るには、その証明の情報も付加されていた方がよいかもしい。A を仮定して B を証明できるとき、A から B へ向かう辺があるはずであるが、それには何らかの証明 p が付随しているはずである。ただし、A を仮定して B を導く証明は無数にあり得るので、つまり、A から B へ向かう辺は無数にあるということの意味する。



このように、2 つの頂点間に複数の異なる辺のあり得る有向グラフは、多重有向グラフ (*multidigraph*) と呼ばれる。クイバーと呼ぶ人もいるが、多重有向グラフと言った方がどんな数学的対象を指しているか想像しやすいと思うので、こちらの用語を用いる。

多重グラフの記法: 通常のグラフでは、辺は頂点の対 (v_0, v_1) として表されるが、多重グラフの場合には、頂点の情報だけではどの辺かを特定できない。このため、多重有向グラフにおける辺は、辺のラベル e 、始点 v_0 、終点 v_1 の 3 つ組 (e, v_0, v_1) で表す必要がある。辺 (e, v_0, v_1) は、しばしば $e: v_0 \rightarrow v_1$ あるいは $v_0 \xrightarrow{e} v_1$ と表記される。この場合、 $\text{dom}(e) = v_0$ および $\text{cod}(e) = v_1$ と書くとする。多重有向グラフの別の見方としては、頂点の集合 V とラベルの集合 E および写像 $\text{dom}, \text{cod}: E \rightarrow V$ の 4 つ組 $G = (V, E, \text{dom}, \text{cod})$ と考えると便利である。今後は、多重グラフをこのような 4 つ組とみなすことにする。ただし、実際は 4 つ組を考えていても、単に (V, E) と書いてしまうことが多い。

さて、ハッセ図や論理式のグラフは、反射的かつ推移的な有向グラフである。一般に、多重有向グラフが与えられたとき、辺の代わりにパスを考えれば、自動的に反射性と推移性は保証される。ここで、パス (*path*) とは、辺の有限列 $\bar{e} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ で、 $\text{cod}(e_i) = \text{dom}(e_{i+1})$ を満たすものことであり、さらに始点 $\text{dom}(\bar{e})$ と終点 $\text{cod}(\bar{e})$ のデータも付随する。パス \bar{e} が長さ 1 以上であれば、 $\text{dom}(\bar{e}) = \text{dom}(e_0)$ かつ $\text{cod}(\bar{e}) = \text{cod}(e_n)$ である (下図・左)。

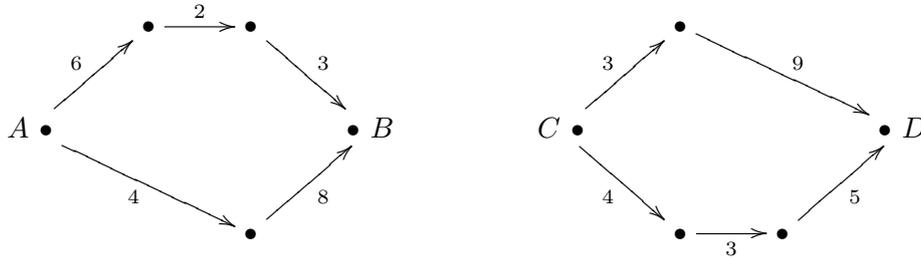


パスの特殊な例として、空なパス $()$ があるが、これは任意に指定した頂点 $v \in V$ から何も動かないことを意味し、自己ループとなる (上図・右)。このため、空なパスには必ず等しい始点と終点が指定されているとし、始点と終点を $v \in V$ とする空なパスを $()_v$ と書く。

さて、上の例では、辺のラベルとして証明を付随させていたが、ラベルには何らかの代数構造が入っていてほしい。最も簡単な例としては、辺が $(\mathbb{R}, +)$ で重み付けられた多重有向グラフがある。

例 1.2. 重み付き多重有向グラフ (*weighted multidigraph*) とは、多重グラフ $G = (V, E, \text{dom}, \text{cod})$ と重み付け関数 $\text{wgt}: E \rightarrow \mathbb{R}$ の対である。各辺 $e \in E$ の重みは $\text{wgt}(e)$ によって与えられる。同様に、各パス $\bar{e} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ の重みは $\text{wgt}(\bar{e}) = \sum_{i=0}^n \text{wgt}(e_i)$ によって与えられる。

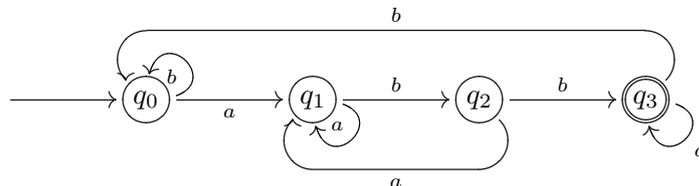
このグラフのパスを辺とするグラフを考え、始点、終点、重みの等しいパスを同一視した商グラフを、以後、しばしば取り扱う。



上のグラフにおいて、 A から B へ向かう上のパスの重みは 11 で下のパスの重みは 12 なので、この 2 つのパスは同値ではない。 C から D へ向かうパスは両方とも重みが 12 なので、この 2 つのパスは同一視される。ところで、 A から B へ向かうパスも重みが 12 のものがあるが、これは始点と終点が異なるので同一視されない。

グラフの辺の重みは、実数のようなものに制限されない。代表例として、記号によって重み付けられた多重有向グラフがある。

例 1.3. オートマトン (*automaton*) はある種の多重有向グラフであるが、辺には記号がラベル付けされている。オートマトンの頂点は状態 (*state*) と呼ばれ、辺は状態の遷移を表す。つまり、オートマトンの辺 $p \xrightarrow{a} q$ は「状態 p において記号 a を読み込むと状態 q に遷移する」ということを意味する。



オートマトンは、ラベル付き辺以外にも、上図のように初期状態や受理状態のデータを持つが、それらを忘れて、単に頂点と辺と重みの情報だけを表したグラフは、半オートマトン (*semiautomaton*) と呼ばれる。形式的には、半オートマトンとは、状態の集合 Q と遷移関数 $\delta: \Sigma \times Q \rightarrow Q$ の対である。ここで、 $\delta(a, p) = q$ という遷移式が辺 $p \xrightarrow{a} q$ によって表されている。

代数構造による重み付け: 記号たちのなす代数構造を考えることによって、辺の重みの概念を統一的に扱いたい。代数構造としてよく知られるものとしては、群・環・体などがあるが、圏の理論で最も重要な役割を果たす代数構造は、それらのいずれでもなく、モノイドと呼ばれるものである。群とは、結合律を満たし、単位元と逆元が存在する 2 項演算をもつ集合であったが、そのうち結合律のみを満たすものを半群、それに加えて単位元が存在するものをモノイドと呼ぶ。

定義 1.4. 集合 S 上の 2 項演算 $*$: $S^2 \rightarrow S$ に関する以下の性質を考える。

$$\text{結合律: } \forall a, b, c \in S ((a * b) * c = a * (b * c)).$$

$$\text{単位元の存在: } \exists \varepsilon \in S \forall a \in S (a * \varepsilon = \varepsilon * a = a).$$

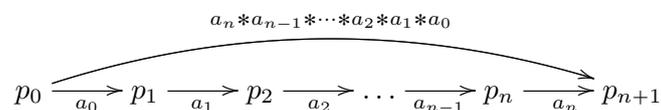
集合 S とその上の 2 項演算 $*$ の組で、結合律を満たすものを半群 (*semigroup*) と呼び、結合律と単位元の存在を満たすものをモノイド (*monoid*) と呼び、しばしば、モノイドは、集合 S 、2 項演算 $*$ 、単位元 e の 3 つのデータの組 $(S, *, e)$ として書かれる。

例 1.5. 自然数上の加法 $+$ と零 0 を考えると、 $(\mathbb{N}, +, 0)$ はモノイドをなす。自然数上の乗法 \times と 1 を考えると、 $(\mathbb{N}, \times, 1)$ はモノイドをなす。

例 1.6. 集合 X 上の関数 $f: X \rightarrow X$ の合成 \circ と恒等写像 id を考えると、 (X^X, \circ, id) はモノイドをなす。

例 1.7. 記号列 $a = a_0a_1 \dots a_n$ と $b = b_0b_1 \dots b_k$ の文字列結合 $a * b = a_0a_1 \dots a_nb_0b_1 \dots b_k$ を記号列たちに関する 2 項演算と考えることができる。使用できる記号の集合 Σ を固定すれば、 Σ の文字列全体の集合 Σ^* は、結合演算によって自明に半群をなす。また、空語 ε が文字列結合 $*$ の単位元となるので、空語 ε を含めればモノイドである。これを Σ 上の自由モノイド (*free monoid*) と呼ぶ。

半オートマトンにおいて、ひとつの文字の読み込みによる状態遷移が辺 $p \xrightarrow{a} q$ に対応していたから、文字列の読み込みによる状態遷移は、パス $p_0 \xrightarrow{a_0} p_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} p_{n+1}$ によって表される。これに基づき、遷移関数 $\delta: \Sigma \times Q \rightarrow Q$ を文字列上の関数 $\delta^*: \Sigma^* \times Q \rightarrow Q$ に拡張できる。つまり、 $\delta^*(a, p)$ は、状態 p を始点として文字列 a を右から順に読み込んで状態遷移を行った結果としよう。たとえば、 $\delta^*(a_n * a_{n-1} * \dots * a_1 * a_0, p_0)$ は、遷移のパス $p_0 \xrightarrow{a_0} p_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} p_{n+1}$ を辿って、状態 p_{n+1} に落ち着く：



記号的にややこしくなるので、 $\delta(a, p)$ を $a \cdot p$ と略記することにする。数学的に形式的には、 δ の δ^* への拡張とは、 $\delta^*(a_n * a_{n-1} * \dots * a_2 * a_1 * a_0, p_0) = a_n \cdot a_{n-1} \dots a_1 \cdot a_0 \cdot p_0$ として与えられる。ここで、演算 \cdot は右結合的 $x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ であるとする。 $\delta^*(a, p)$ のことも $a \cdot p$ と略記してしまえば、 $\delta^*: \Sigma^* \times Q \rightarrow Q$ は次の条件を満たす：

$$\varepsilon \cdot p = p, \quad (a * b) \cdot p = a \cdot (b \cdot p). \tag{1}$$

元の遷移関数 δ を考えることと δ^* を考えることは同値なので、半オートマトンとは $\delta^*: \Sigma^* \times Q \rightarrow Q$ のことだ、と言ってしまっても差し支えはない。ただし、上の条件 (1) は自動的に満たされる。条件 (1) は、数学用語を用いれば、モノイド作用というものが満たす条件である。つまり数学的には、

「半オートマトンとは、自由モノイド $\Sigma^* = (\Sigma^*, *, \varepsilon)$ の集合 Q へのモノイド作用のことである」

と言ってしまってもよい。

注意. ハッセ図と同様に、半オートマトンと言った場合にアルファベット Σ や状態集合 Q に有限性を課することが多いようである。しかし、本稿では有限性を仮定しないこととする。

さて、状態 p から状態 q へ遷移するパスが複数あったとしても、すべてのパスを異なるパスとみなすのではなく、同一視したいパスもある。たとえば、例 1.2 の重み付き多重有向グラフでは、重みの等しいパスは同一視していた。このように「どのパスを同一視するか」というルールが与えられているとする。数学的には、パスの同一視のルールとは、文字列 $u, v \in \Sigma^*$ に関する等式 $u =_R v$ たちの集合 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ である。こうすると、自由モノイド Σ^* ではなく商モノイド $\langle \Sigma \mid R \rangle$ の状態集合 Q へのモノイド作用が得られる。

一般に、モノイド $(M, *, \varepsilon)$ と集合 Q が与えられているとしよう。関数 $\delta: M \times Q \rightarrow Q$ について、 $\delta(a, x)$ のことを $a \cdot x$ と略記すれば、 δ がモノイド作用 (*monoid action* or *act*) であるとは、条件 (1) を満たすことである。したがって、モノイド作用は、 M の元を読み込み関数 δ に基づいて状態遷移を行うある種の半オートマトンと同一視でき、これをグラフとして図示できる。以後、しばしば M によるモノイド作用のことを M -半オートマトンと呼ぶことにする。以上の話をまとめると、

$$\text{(半)オートマトン} \approx \text{集合へのモノイド作用.}$$

さて、状態が 1 つしかない、つまり $Q = \{\bullet\}$ であるような半オートマトンを考えると、これが代数構造によって重み付けられたグラフの最も簡単な例となる。これは実質的に、モノイドを考えることと同等である。つまり、モノイド自身は、1 つの頂点からなるグラフと同一視できる。

例 1.8. M をモノイドとする。このとき、頂点の集合を $V = \{\bullet\}$ とし、辺の集合を $E = M$ とするグラフを考える。つまり、各 $a \in M$ について、 $\bullet \xrightarrow{a} \bullet$ が辺となる。

他の代数構造もまた一点グラフとして見ることができる。たとえば、群を一点グラフとして見れば、すべての辺が可逆である、という特徴を持つ。ここで、辺の可逆性については後に定義する (定義 1.18)。また、集合に群が作用しているとき、群によって重み付けられたグラフを得ることもできる。

例 1.9. 集合 X に群 G が作用しているとする。このとき、 X を頂点とする有向グラフを得ることができる。ここで、群 G の各元 g は、各頂点 $x \in X$ を頂点 $gx \in X$ に動かすので、これを辺と考える。つまり、辺は各 $g \in G$ について、 $g|_x: x \rightarrow gx$ によって与えられる。このグラフを作用歪群 (*action groupoid*) と呼ぶ。

$$\begin{array}{ccc} & g|_x & \\ & \curvearrowright & \\ x & & gx \\ & \curvearrowleft & \\ & g^{-1}|_{gx} & \end{array}$$

1.2. グラフと歪モノイド

パスのなすグラフ (自由グラフ): 半オートマトンの項目で議論したように、グラフの辺に注目するよりもパスに注目した方が、いろいろと見通しがよくなる。多重有向グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき、辺の集合 E の代わりにパスの集合 E^* を考えても、 $G^* = (V, E^*)$ は多重有向

ラフとなる。ただし、注意しておくとして、 $G = (V, E)$ を単に $G^* = (V, E^*)$ に置き換えてしまうと、「パスの結合」の情報が失われてしまう。

これを説明するために、多重有向グラフ G におけるパス $x \xrightarrow{a} y$ と $y \xrightarrow{b} z$ を考え、このパスの結合を $b \circ a$ と表すことにする。

$$x \xrightarrow{b \circ a} z := x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{b} z \quad (\text{in } G)$$

このとき、多重有向グラフ G^* において、3つの辺 $x \xrightarrow{a} y, y \xrightarrow{b} z$ および $x \xrightarrow{b \circ a} z \in E^*$ があり、また、 G^* における長さ2のパス (a, b) 、つまり $x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{b} z \in E^{**}$ がある。しかし、 $G^* = (V, E^*)$ という形式的な情報からは G^* の辺 $b \circ a \in E^*$ と長さ2のパス $(a, b) \in E^{**}$ の関係を復元することができない。

$$x \xrightarrow{b \circ a} z \stackrel{?}{=} x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{b} z \quad (\text{in } G^*)$$

この問題を解決するために、多重有向グラフのパス集合を辺集合に変えた新たな多重有向グラフを考える際には、パスの結合関係の情報も記憶した構造を考えたい。具体的には、グラフ G^* におけるパス $(a, b) \in E^{**}$ を G^* における辺 (G におけるパス) $b \circ a \in E^*$ に対応付ける写像

$$\mu: (a, b) \in E^{**} \mapsto b \circ a \in E^*$$

が組み込まれた構造 (V, E^*, μ) を考える、ということである。これは、 (V, E^*, \circ) を考えることである、と言っても同様である。ともかく、 E^* がパスの集合であったという情報を記憶するためには、パスの結合 \circ のデータを保持しておく必要があるのである。この組 $\text{Path}(G) := (V, E^*, \circ)$ を $G = (V, E)$ の生成する自由 グラフ と呼んでおくことにする。

注意. 厳密には、自由 グラフ には \circ というデータが付随しているので、通常の意味でのグラフではないのであるが、本稿では以後は \circ というデータの付加された構造もまた グラフ と呼ぶことにする (定義 1.12 と 1.13 を参照)。標準的な文献では、この自由 グラフ の概念は自由圏 (*free category*) と呼ばれる。

パス上の合同関係: ここまでで重み付き有向グラフなどを考えてきたが、例 1.2 で述べたように、重みの総量 (コスト) の等しいパスを同一視してしまうのは妥当であろう。そういうわけで、以後、グラフ と言った場合には、何かによる重み付き有向多重グラフであり、始点・終点・重みが等しいパスを同一視したものを指したい (つまり、有限パスの始点・終点・重みが等しいことを表す同値関係 \sim が定義できるが、この同値関係で割った商 グラフ を常に考える)。これは、「パスの始点・終点・重み」の情報 $x \xrightarrow{\text{wgt}(e)} y$ のことを「辺」と呼び、パスの結合 \circ の情報を保持するが、その他の情報はすべて忘れよう、と宣言していることと同等である。

しかし、「何かによる重み付け」というのは不明瞭であるので、これを形式化したい。それでは、ここをパス上の任意の同値関係としてみたらどうだろうか。というと、これは上手くは行かない。しかし、「パスの結合 \circ と整合的な」同値関係を考えることによって、すべては上手く行く。

まず、集合 A 上の2項関係 \sim が同値関係 (*equivalence relation*) とは何であったかを思い出す

と、任意の $a, b, c \in A$ に対して以下を満たすことである。

$$\begin{aligned} & \text{(反射律)} a \sim a; \quad \text{(対称律)} a \sim b \implies b \sim a; \\ & \text{(推移律)} a \sim b \text{ and } b \sim c \implies a \sim c. \end{aligned}$$

定義 1.10. 多重有向グラフ (V, E) のパスの集合 E^* 上の 2 項関係 \sim が合同関係 (*congruence relation*) であるとは、 \sim が同値関係の条件を満たし、さらに任意のパス $a, b, a', b' \in E^*$ について以下の 2 つの条件を満たすことである。

$$\begin{aligned} a \sim b & \implies (\text{dom}(a) = \text{dom}(b) \text{ and } \text{cod}(a) = \text{cod}(b)). \\ (a \sim a' \wedge b \sim b' \wedge \text{cod}(a) = \text{dom}(b)) & \implies b \circ a \sim b' \circ a'. \end{aligned}$$

合同関係の定義は、グラフ的に書き表せば、同値関係 \sim が以下の 2 つの条件を満たすことである、としても同様である。

$$\begin{aligned} x \xrightarrow{a} y \sim x' \xrightarrow{b} y' & \implies (x = x' \text{ and } y = y'). \\ (x \xrightarrow{a} y \sim x \xrightarrow{a'} y \text{ and } y \xrightarrow{b} z \sim y \xrightarrow{b'} z) & \implies x \xrightarrow{b \circ a} z \sim x \xrightarrow{b' \circ a'} z. \end{aligned}$$

例 1.11. 例 1.2 の実数による重み付き多重有向グラフ $G = (V, E)$ を考える。このとき、パスの集合 E^* 上の 2 項関係 \sim を「始点・終点・重みが等しい」という関係、つまり

$$a \sim b \iff [\text{dom}(a) = \text{dom}(b) \text{ かつ } \text{cod}(a) = \text{cod}(b) \text{ かつ } \text{wgt}(a) = \text{wgt}(b)]$$

として定義する。この関係 \sim は合同関係である。

さて、同値関係あるところに商の概念がある。集合 A 上の同値関係 \sim が与えられたとき、各 $a \in A$ の \sim -同値類 (*equivalence class*) とは、 $[a] = \{b \in A : a \sim b\}$ によって定義されるものであり、商集合 (*quotient set*) は $A/\sim = \{[a] : a \in A\}$ によって定義されるものであった。

いま、多重有向グラフ $G = (V, E)$ のパス集合 E^* 上の合同関係 \sim が与えられているとき、商集合 E^*/\sim を考えることにしよう。任意の $a \in E^*$ について、

$$\text{dom}([a]) := \text{dom}(a); \quad \text{cod}([a]) := \text{cod}(a)$$

と定義する。合同関係の 1 つめの条件より、これは矛盾なく定義されている。同様に、任意のパス $x \xrightarrow{a} y, y \xrightarrow{b} z \in E'$ について、パス結合演算を

$$[b] \circ [a] := [b \circ a]$$

と定義しても、合同関係の 2 つめの条件より、これは矛盾なく定義されている。このとき、自由グラフ $\text{Path}(G) = (V, E^*, \circ)$ の \sim による商グラフ (*quotient graph*) を以下によって定義する。

$$\text{Path}(G)/\sim := (V, E^*/\sim, \circ).$$

上の dom と cod の定義によって, $(V, E^*/\sim)$ は多重有向グラフであり, \circ はパス結合演算を与える. これがわれわれの求める グラフ 概念, つまり多重有向グラフのパスに対して同一視のルールを与えたものである.

定義 1.12. ある多重有向グラフ G のパス上の合同関係 \sim による商 グラフ $\text{Path}(G)/\sim$ のことを (本稿では) グラフ と呼ぶことにする.

念のため注意しておく, グラフ理論では, グラフと言った場合に無向グラフを指すことが多く, これから語る圏の理論では, グラフと言った場合に多重有向グラフを指すことが多い. したがって, 本稿で用いる グラフ という用語はどちらの慣習とも異なることに注意する.

さて, この グラフ 概念はイメージ的には明確であるが, この定義だと, その数学的構造があまり明確でない. 実を言えば, これは, 数学的には, 多重有向グラフ構造にパスの結合というモノイド様の構造が付加されたものであると思うことができる. あるいは逆に, モノイド構造がグラフ状に分散したものと思ってもよい. 一般に, 代数系の持つ演算について, 部分演算を認め, グラフ構造を付与する操作 (多ソート化) を亜化 (oidification) と言う. そして, 定義 1.12 の グラフ 概念は, 以下のようにモノイドの亜化 (多ソート化) として導入することができる.

定義 1.13. 亜モノイド (*monoidoid*) とは, 次の条件を満たす組 $(V, E, \text{dom}, \text{cod}, \circ, 1_\bullet)$ である. まず, 4 組 $(V, E, \text{dom}, \text{cod})$ は多重有向グラフである. つまり, V は頂点の集合, E は辺の集合であり, $\text{dom}, \text{cod}: E \rightarrow V$ は辺の始点と終点を指定する写像である. さらに, 辺の集合 E 上には以下のような構造が入っている.

- (亜モノイド演算) \circ は $D := \{(a, b) \in E \times E : \text{cod}(b) = \text{dom}(a)\}$ 上の 2 項演算である. つまり, 関数 $\circ: D \rightarrow E$ が定義されている. 以下, $(a, b) \in D$ について, $\circ(a, b)$ のことを $a \circ b$ と書くことにする. さらに, 任意の $a, b \in E$ について, 以下が成立する.

$$(a, b) \in D \implies [\text{dom}(a \circ b) = \text{dom}(b) \text{ かつ } \text{cod}(a \circ b) = \text{cod}(a)].$$

- (結合律) $(a, b), (b, c) \in D$ ならば, 以下が成立する.

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

- (単位辺の存在) 任意の頂点 $x \in V$ について, $\text{dom}(1_x) = \text{cod}(1_x) = x$ であるような自己ループ $1_x \in E$ が存在して, 以下の条件を満たす: $\text{dom}(a) = \text{cod}(b) = x$ であるような任意の $a, b \in E$ について,

$$a \circ 1_x = a \text{ かつ } 1_x \circ b = b.$$

亜モノイドの定義が何を意味しているかについて分析しよう. このために, 辺を常に 3 組

$x \xrightarrow{a} y$ あるいは (a, x, y) と同一視してしまうことにする．つまり， E を 3 つ組 (a, x, y) たちの集合だと思ってしまえば， dom と cod は省略して， $(V, E, \circ, 1)$ のことを垂モノイドと呼んでしまってもよい．

すると，垂モノイドとは，多重有向グラフ (V, E) の辺 (パス) 集合 E に，以下のようなパス結合演算 \circ が付随したものである，言い表すことができる．

- (推移律) \circ は E 上の部分 2 項演算で，次のようなものである：

$$x \xrightarrow{a} y, y' \xrightarrow{b} z \in E \text{ and } y = y' \implies x \xrightarrow{b \circ a} z := x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{b} z \in E.$$

- (結合律) 部分 2 項演算 \circ は結合的である：

$$x \xrightarrow{a} (y \xrightarrow{b} z \xrightarrow{c} w) = (x \xrightarrow{a} y \xrightarrow{b} z) \xrightarrow{c} w.$$

- (単位辺の存在) 任意の頂点 $x \in V$ について，単位辺 $x \xrightarrow{1_x} x \in E$ が存在する：

$$x \xrightarrow{1_x} x \xrightarrow{a} y = x \xrightarrow{a} y \text{ and } z \xrightarrow{b} x \xrightarrow{1_x} x = z \xrightarrow{b} x.$$

以後は， 1 も省略して (V, E, \circ) と書いてしまったり， \circ も省略して (V, E) と書いてしまったりすることもある．

命題 1.14. 定義 1.12 の意味での グラフ と垂モノイドは等価な概念である．

Proof. グラフ $\text{Path}(G)/\sim$ が与えられたとき，上に述べたように $(V, E^*/\sim)$ は多重有向グラフをなす．グラフ G 上でのパスの推移律より $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ が成立しているから，グラフ $\text{Path}(G)/\sim$ でも $[a] \circ ([b] \circ [c]) = ([a] \circ [b]) \circ [c]$ が成立している．また，恒等辺は長さ 0 のパス ε の同値類 $[\varepsilon]$ によって与えられる．グラフ G において $\varepsilon \circ a = a \circ \varepsilon = a$ を満たすから，グラフ $\text{Path}(G)/\sim$ でも $[\varepsilon] \circ [a] = [a] \circ [\varepsilon] = [a]$ が成立する．よって，グラフ $\text{Path}(G)/\sim$ は垂モノイドであることが示された．

逆に，垂モノイド $H = (V, E, \circ)$ が与えられたとき，パス $a = (a_0, \dots, a_\ell), b = (b_0, \dots, b_k) \in E^*$ に対する 2 項関係 $a \sim b$ を以下によって定義する．

$$a \sim b \iff a_\ell \circ \dots \circ a_0 = b_k \circ \dots \circ b_0.$$

等号を用いて定義されているので，これが合同関係であることを確かめるのは難しくない．しかし，商グラフ $\text{Path}(H)/\sim$ の任意の辺 $a = (a_0, \dots, a_\ell) \in E^*$ は元の H のパスであるから， $a_\ell \circ \dots \circ a_0$ は H の辺 $a' \in E$ となり， \sim の定義より $a \sim a'$ を得る．つまり，任意のパス $a \in E^*$ はある辺 $a' \in E$ と \sim -同値である．したがって， $E^*/\sim = \{[a] : a \in E\}$ となる．結論として，商グラフ $(V, E^*/\sim, \circ)$ から $[-]$ を形式的に取り除いたものが元の $H = (V, E, \circ)$ に一致する．つまり， $\text{Path}(H)/\sim$ と H は表面的な記号の差があるだけで同一物である．よって，任意の垂モノイド H は商グラフ $\text{Path}(H)/\sim$ として表されることが示された． \square

命題 1.14 より，定義 1.12 の意味での グラフ と垂モノイドは同一概念であるから，垂モノイドのことも グラフ と呼んでしまうことにする．一般論に入る際には，垂モノイドによる定義の方が見通しが良いが，具体的な グラフ の例を手軽に作る際には，商 グラフ を用いた定義もま

た有用である（第 3 節で扱うローヴェア理論などを参照）．実際，定義 1.12 の意味での（つまり商グラフとしての）グラフであれば，無限にいくらでも例を作れる気分になれると思われる．

ちなみに，通常，定義 1.12 のグラフ概念および定義 1.13 の亜モノイド概念は，圏 (*category*) と呼ばれる．言い換えれば，圏とは，辺集合上にモノイドっぽい構造を持つ多重有向グラフである．

グラフ（別称：圏，亜モノイド） \approx 多重有向グラフ + (ほぼ)モノイド

このようなグラフは，数学の至る分野において豊富に具体例があることが知られている．ほとんどの具体例は，グラフ理論とは全く無関係なものであるが，そのグラフ構造を見るだけで様々なことが分かる，というのが圏の理論の教えるところである．

ところで，圏あるいはカテゴリーと言った場合に，そこには《広範な分野を跨ぐ》という思想が込められていることが多いと思う．しかし，本稿の扱う範囲は極一部の分野に集中するもので，多分野を跨ぐという心からは大きく離れる．このため，本稿では，第 1 節，第 2 節，および第 3 節の途中までは「グラフとオートマトン」的な構造として圏を取り扱っていく．

雑談．本格的な圏の理論においては，圏のグラフ的側面を強調する利益は多くないかもしれないが，「圏に慣れる」段階だと多少のメリットはあると思われる．やはり，圏に関する諸々の数学的概念の具体例という話になると，「普通の数学に出てくる自然な例」ばかり上がりがちである．しかし，先に述べたように，ただのグラフの一種であると考えれば，自然な例だけでなく，「人工的な例」を自力でたくさん作るのはむずかしくない．数学的概念の定義に慣れる段階では，人工的で不自然な，おもちゃのような例をいくらでも作れるということは重要であるかもしれない．

例 1.15. 半オートマトン $\delta^*: \Sigma^* \times Q \rightarrow Q$ が与えられたら，状態集合 Q を頂点集合とし遷移 δ^* を辺に対応させるグラフを得られる．つまり，遷移 $p \xrightarrow{a} \delta^*(a, p)$ を辺とするグラフを得られるが，これは定義 1.12 や 1.13 の意味でもグラフである．部分 2 項演算 \circ は遷移の合成に対応し，単位辺は，空語を読み込んだ場合の遷移 $p \xrightarrow{\varepsilon} p$ に対応する．

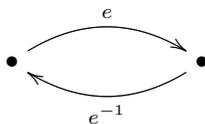
例 1.16. モノイド $(M, *, 1)$ の一点グラフ $(V_M, E_M, \circ_M, 1)$ は， $V_M = \{\bullet\}$ ， $E_M = M$ ， $\circ_M = *$ ， $1_\bullet = 1$ によって定義されるグラフである．

例 1.17. 集合と関数のグラフ $\text{Set} = (V_{\text{Set}}, E_{\text{Set}}, \circ_{\text{Set}}, 1)$ は， V_{Set} を集合全体， E_{Set} を関数全体， \circ_{Set} を関数合成， 1_X を集合 X 上の恒等関数とするグラフである（厳密には， V_{Set} や E_{Set} は集合でなくクラスと呼ばれるものであるが，細かいことには目をつぶることにする．詳細な議論については，第 8.1 節を見よ）．

定義 1.18. グラフ (V, E, \circ) の辺 $u \xrightarrow{e} v \in E$ が可逆 (*invertible*) であるとは，ある辺 $v \xrightarrow{d} u \in E$ が存在して，

$$v \xrightarrow{d} u \xrightarrow{e} v = v \xrightarrow{1_v} v, \quad \text{かつ} \quad u \xrightarrow{e} v \xrightarrow{d} u = u \xrightarrow{1_u} u$$

となることを意味する．短く書けば， $e \circ d = 1_v$ かつ $d \circ e = 1_u$ ということである．そのような辺 d のことを e^{-1} と書く．



また，すべての辺が可逆である グラフ のことを **歪群 (groupoid)** と呼ぶ．頂点 $u, v \in V$ を結ぶ可逆辺 $u \xrightarrow{e} v$ が存在するとき， u と v は **同型 (isomorphic)** であると言い， $u \simeq v$ と書く．

例 1.19. 群とは，すべての辺が可逆であるような一点 グラフ であり，特に，それは歪群の一種である．また，作用歪群 (例 1.9) のすべての辺は可逆であるから，作用歪群も歪群の一例である．

以後， グラフ (圏) に関する記法として，以下を用いる．

定義 1.20. グラフ $C = (V, E, \circ)$ の頂点 $x, y \in V$ について， x から y へ向かう辺 $x \xrightarrow{e} y \in E$ 全体の集合を $C(x, y)$ と書く．しばしば $C(x, y)$ の代わりに $\text{Hom}_C(x, y)$ と書かれることもあり，これは **ホム集合 (hom-set)** と呼ばれる．

1.3. グラフ準同型

さて，何か数学的構造があれば，それに対応する準同型概念がある．たとえば，次の 2 つの準同型概念を見てみよう．

定義 1.21 (多重有向グラフ準同型). 多重有向グラフ $G = (V_G, E_G)$ から $H = (V_H, E_H)$ への準同型 (graph homomorphism) とは，写像 $f_V: V_G \rightarrow V_H$ と $f_E: E_G \rightarrow E_H$ の対 $f = (f_V, f_E)$ であって，任意の辺 $e \in E_G$ に対して，以下を満たすものである．

$$\text{dom}(f_E(e)) = f_V(\text{dom}(e)), \quad \text{かつ} \quad \text{cod}(f_E(e)) = f_V(\text{cod}(e)).$$

つまり，辺 $x \xrightarrow{e} y$ の行き先 $f_E(e)$ の始点と終点が，始点の x の行き先 $f_V(x)$ と終点 y の行き先 $f_V(y)$ にしっかり一致しているということである．

$$x \xrightarrow{e} y \quad \Longrightarrow \quad f_V(x) \xrightarrow{f_E(e)} f_V(y).$$

多重有向グラフの準同型は，単独の関数でなく，関数の対 (f_V, f_E) である，というのが少し厄介なところである．しばしば f_V の方しか書かれないことがあるが，重要なのはどちらかといえば f_E の方であるという点は念頭に置いておこう．

定義 1.22 (モノイド準同型). モノイド $(M, *_M, 1_M)$ から $(N, *_N, 1_N)$ への準同型 (monoid homomorphism) とは，写像 $f: M \rightarrow N$ であって，以下を満たすもののことである．

$$f(1_M) = 1_N, \quad \text{かつ} \quad f(a *_M b) = f(a) *_N f(b)$$

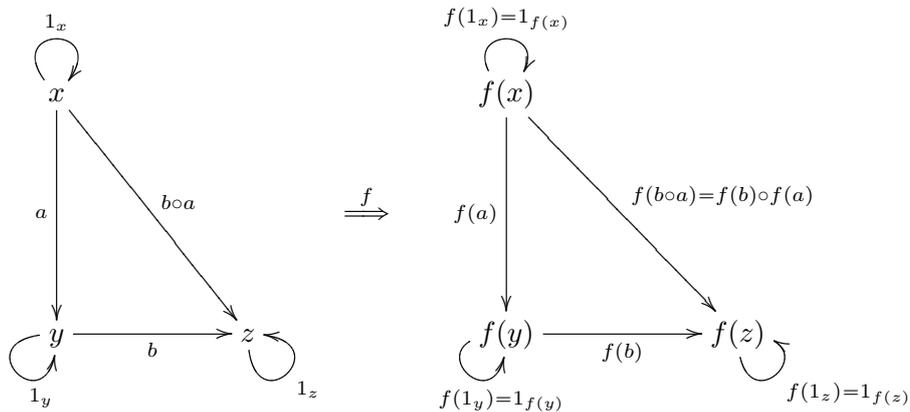
さて、われわれの グラフ は、多重有向グラフ $(V, E, \text{dom}, \text{cod})$ とモノイド $(E, \circ, 1)$ を混ぜ合わせたものであるから、グラフの準同型もまた、多重有向グラフ準同型とモノイド準同型を混ぜ合わせたものとして定義される。

定義 1.23. グラフ $C = (V_C, E_C, \circ_C)$ から $D = (V_D, E_D, \circ_D)$ への準同型 (*homomorphism*) とは、写像 $f_V: V_C \rightarrow V_D$ と写像 $f_E: E_C \rightarrow E_D$ の対 $f = (f_V, f_E)$ で、次を満たすものである。

$$\text{dom}(f_E(e)) = f_V(\text{dom}(e)), \quad \text{かつ} \quad \text{cod}(f_E(e)) = f_V(\text{cod}(e)).$$

$$f_E(1_v) = 1_{f(v)}, \quad \text{かつ} \quad f_E(e' \circ_C e) = f_E(e') \circ_D f_E(e).$$

ただし、 f_E と f_V のことを区別せずに単に $f: C \rightarrow D$ と書くことが多い。



グラフ準同型の定義式の一行目は多重有向グラフの準同型、二行目はモノイドの準同型である。定義 1.23 の意味での グラフ 準同型は、通常は関手 (*functor*) と呼ばれる。なお、上の定義では、 \circ_C と \circ_D というように C と D の垂モノイド演算を別の記号で表しているが、以後は単に \circ と書いてしまうことが多い。グラフ準同型つまり関手のむずかしいところは、これが一つの写像ではなく、頂点上の写像 f_V と边上の写像 f_E の対 $f = (f_V, f_E)$ である、という点である。しかし、これは関手のむずかしさではなく、グラフ理論における多重有向グラフ準同型 (定義 1.21) のむずかしさであるから、まずは多重有向グラフ準同型から慣れていくとよい。

グラフがパス上の合同関係の商として具体的に与えられているときには、垂モノイド構造はパス結合演算と合同関係から自動的に発生するものであるから、グラフ準同型のモノイド準同型的な成分も合同関係の保存性に置き換えることができる。つまり、グラフが $C = \text{Path}(G)/\sim_G$ および $D = \text{Path}(H)/\sim_H$ として与えられているときは、 C から D へのグラフ準同型とは、合同関係を保つ多重有向グラフ準同型だと考えることができる。具体的には、 C から D へのグラフ準同型 (つまり関手) とは、多重有向グラフ準同型 $f = (f_V, f_E): \text{Path}(G) \rightarrow \text{Path}(H)$ であって、

$$e \sim_G e' \implies f_E(e) \sim_H f_E(e')$$

を満たすものから誘導される写像の対である．まとめると， グラフ を定義する合同関係が明示的に与えられている場合には， グラフ 準同型とは，単に，合同関係を保つ多重有向グラフ準同型であると考えてもよい．

グラフ 準同型 (別称: 関手) \approx 多重有向グラフ準同型 + (ほぼ) モノイド準同型
 \approx 合同関係を保つ多重有向グラフ準同型

例 1.24. (多重辺や重みを持たない) 有向グラフ G, H の間のグラフ準同型 $f: G \rightarrow H$ について，グラフ準同型の条件の 2 行目の式は自動的に満たされる．よって， f は通常の意味のグラフ準同型である:

$$(\forall u, v \in V_G) [(u, v) \in E_G \implies (f(u), f(v)) \in E_H].$$

特に，半順序 P, Q のハッセ図の間のグラフ準同型 f は，順序を保存する写像に他ならない:

$$(\forall x, y \in P) [x \leq_P y \implies f(x) \leq_Q f(y)].$$

例 1.25. モノイドは多数の自己ループを持つ 1 点グラフであったことを思い出そう．このとき，モノイド $(M, *_M, 1_M)$ と $(N, *_N, 1_N)$ の間の準同型 $f: M \rightarrow N$ について，準同型の条件の 1 行目の式は自動的に満たされる．よって，モノイド上のグラフ準同型 f は，モノイド準同型のことである:

$$f(1_M) = 1_N, \text{ かつ } f(a *_M b) = f(a) *_N f(b).$$

以上をまとめると， グラフ (圏) の定義とは，有向グラフとモノイドを混ぜたようなものであったが，上の 2 つの例のように， グラフ 準同型 (関手) の定義もまた，有向グラフ準同型とモノイド準同型を混ぜたものであると考えられる．ちなみに，多重辺や重みを持たない有向グラフを考えることは，半順序のハッセ図を考えることと同等である．そういうわけで， グラフ (圏) とは，半順序のハッセ図とモノイドのキメラとも言えるかもしれない． グラフ (圏) の最も鍵となる例として，半順序のハッセ図とモノイドの一点 グラフ は今後も多用していく．

例 1.26. その他の例として，何らかの数学的構造の「定義」自体を グラフ 準同型 (関手) として表すという方法がある．たとえば，「多重有向グラフの定義」とは，頂点集合 V と辺集合 E を指定し，始域と終域を写像 $\text{dom}, \text{cod}: E \rightarrow V$ によって定めるものであった．これは「1 つの多重有向グラフを定義する」ということであるが，次のように集合と関数の グラフ Set の中に図示できる．

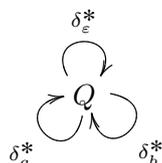
$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dom}} \\ \xrightarrow{\text{cod}} \end{array} \triangleright V$$

しかし，多重有向グラフを定義する際において，我々には， $E, V, \text{dom}, \text{cod}$ の選択の余地がある．つまり，「多重有向グラフの定義」とは，「形状 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ の グラフ Set の中における任意の実現」

といってよい。これは、つまり「形状 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ のグラフから集合と関数の グラフ Set への グラフ 準同型」である。より正確には、 P を 2 つの異なる頂点 a, b および 2 つの異なる辺 $a \xrightarrow{d} b$ と $a \xrightarrow{c} b$ からなる グラフ であるとすれば、多重有向グラフとは、 グラフ 準同型 $G: P \rightarrow \text{Set}$ のことである。

$$\bullet \rightrightarrows \bullet \quad \xrightarrow{G} \quad E \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dom}} \\ \xrightarrow{\text{cod}} \end{array} V$$

例 1.27. 半オートマトン $\delta^*: \Sigma^* \times Q \rightarrow Q$ の定義についても考えてみよう。この定義は、各文字列 $a \in \Sigma^*$ 毎に遷移関数 $\delta_a^*: Q \rightarrow Q$ を与えることと同値である。つまり、 $\delta_a^*(p) = \delta^*(a, p)$ を考えている。すると、「半オートマトンの定義」とは、状態集合 Q を指定し、 $a \in \Sigma^*$ 毎に関数 $\delta_a^*: Q \rightarrow Q$ を定めるものである。これは 1 つの頂点 Q と多数の自己ループを持つ多重有向グラフとして、集合と関数の グラフ Set の中に図示できる。



つまり、「半オートマトンの定義」とは、「自由モノイド Σ^* の一点 グラフ $(\{\bullet\}, \Sigma^*, *)$ の形状の、グラフ Set の中における任意の実現」といってよい。これは、つまり、自由モノイド Σ^* の一点 グラフ から集合と関数の グラフ Set への グラフ 準同型 $\alpha: \Sigma^* \rightarrow \text{Set}$ である。



より一般に、 $(M, *, 1)$ をモノイドとし、これを一点 グラフ $(\{\bullet\}, M, *)$ とみなす。このとき、グラフ 準同型 $\alpha: M \rightarrow \text{Set}$ は、集合 $Q_\alpha := \alpha(\bullet)$ への グラフ M の左作用とみなせる。なぜなら、グラフ M の各辺 $g \in M$ について、グラフ Set の辺 $\alpha(g): Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha$ が対応する。グラフ 準同型の定義より、 $\alpha(1) = 1_{Q_\alpha}$ かつ $\alpha(h * g) = \alpha(h) \circ \alpha(g)$ となる。いま $g \cdot x = \alpha(g)(x)$ と定義すれば、これは $1 \cdot x = x$ かつ $(h * g) \cdot x = h \cdot (g \cdot x)$ であることを意味する。つまり、 $(g, x) \mapsto g \cdot x = \alpha(g)(x)$ は集合 $Q_\alpha = \alpha(\bullet)$ へのモノイド M の左作用を与える。

同様にして、群 G を一点 グラフ と同一視したときの グラフ 準同型 $\alpha: G \rightarrow \text{Set}$ は、集合 $X_\alpha := \alpha(\bullet)$ への群 G の左作用とみなせる。

§ 2. 極限と余極限

グラフ の中には他とは一際違った頂点があることもある。たとえば、有限グラフ理論においては、すべての頂点と辺で結ばれている頂点を支配頂点や普遍頂点と呼ぶそうである。ただし、後者の呼び名は非常に混乱を招くので、本稿では用いない。グラフ 理論においては、重要な支配

頂点として、始対象と終対象がある。グラフ $G = (V, E)$ の頂点 $0 \in V$ が始対象 (*initial object*) であるとは、任意の頂点 $v \in V$ に対して、辺 $0 \rightarrow v$ が一意に存在することを意味する。グラフ G の頂点 $1 \in V$ が終対象 (*terminal object*) であるとは、任意の頂点 $v \in V$ に対して、辺 $v \rightarrow 1$ が一意に存在することを意味する。

例 2.1. 半順序のハッセ図においては、半順序の最小元が始対象であり、最大元が終対象である。論理式のグラフにおいては、矛盾 \perp が始対象であり、恒真 \top が終対象である。

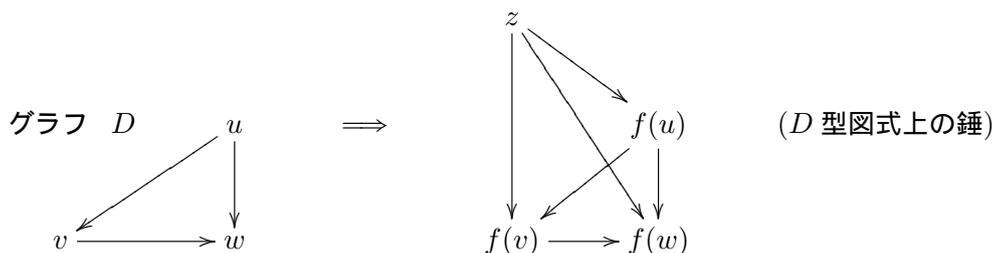
例 2.2. 集合と関数のグラフ Set においては、空集合 \emptyset が始点であり、任意の単元集合 $\{\bullet\}$ が終点である。

そういうわけで、本節では、グラフの中にある特別な種類の頂点に注目していこう。たとえば、頂点の中には、他の頂点と何らかの関係性を持ったものがある。具体例を挙げると、論理式のグラフにおいて、 $P \wedge Q$ という1つの頂点は、 P および Q という2つの頂点と何らかの関連性があるに違いない。これについては、グラフの中の図の極限として説明しよう。

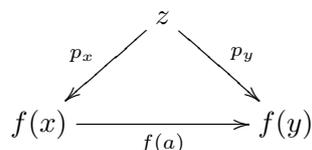
(第2節の内容は、しばらくは2項積と終対象しか用いないので、2項積と終対象の定義を確認したら、先に第3節以降に進んでしまってもよい)

2.1. グラフの中の図の極限

グラフ D からグラフ C へのグラフ準同型 $f: D \rightarrow C$ は、 C における D 型図式 (*diagram of shape D*) と呼ばれる。 D 型図式と言ってもいい。つまり、像を見れば、 D の姿をした C の部分グラフのことである(ただし、グラフ準同型は D をいくらか潰しているかもしれない)。このような D 型図式に対して、 C の頂点 z を一つ頭に加えた「錘」というものに注目しよう。

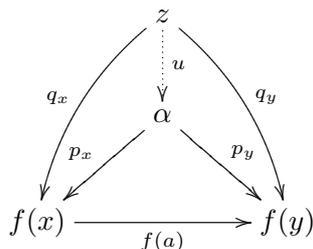


具体的には、 D 型図式 $f: D \rightarrow C$ が与えられたとき、その上の錘 (*cone*) とは、 C のある頂点 z から $f[D]$ への各頂点へ向かう辺の族 $(z \xrightarrow{p_d} f(d))_{d \in D}$ であって、 D のどの辺 $x \xrightarrow{a} y$ を見ても、次の図式を可換にするものである。



ここで図式が可換というのは、どちらのルートを通っても変わらない、つまり重み付きグラフで考えれば、どのルートを通ってもコスト（重みの総量）が等しい、ということである。

さて、錘にもいろいろあるが、最もギリギリ錘になっている、という性質を満たす錘には特別な名前が付いている。ここで、錘 $(\alpha \xrightarrow{p_d} f(d))_{d \in D}$ が最もギリギリ錘になっている、とはどういうことかと言うと、次を意味する： D 上のどんな錘 $(z \xrightarrow{q_d} f(d))_{d \in D}$ が与えられても、 z から α への辺 $z \xrightarrow{u} \alpha$ が一意に存在して、 D のどの辺 $x \xrightarrow{a} y$ を見ても、次の図式を可換にする。



このように最もギリギリ錘になっているような錘 $(\alpha \xrightarrow{p_d} f(d))_{d \in D}$ のことを D 型図式 $f: D \rightarrow C$ の極限 (limit) と呼ぶ。このとき、各辺 p_d のことをこの極限の射影 (projection) と呼ぶ。

グラフ C に多重辺も重みもない場合、つまり単なる有向グラフの場合には、極限とは最も内側にある錘のことである。重み付きグラフを考えると、錘の終点を向かう際に極限を経由するルートを通ってもコストが変わらないということである。これについては、具体例をいくつか触ってみるのがよい。

積（離散グラフ型図式の極限）最もわかりやすいものは、離散グラフ型図式の極限である。離散グラフとは、単位辺（自己ループ）以外の辺を持たない グラフ を意味する。まずは、2つの頂点 $\{a, b\}$ からなる離散グラフ 2 を考えてみる。すると、グラフ C における 2 点離散グラフ型図式とは、 C の頂点のうち 2 つ $\{P, Q\}$ を指名することに他ならない。このとき、2 点離散グラフ型図式上の錘とは、辺の対 $(R \xrightarrow{p_0} P, R \xrightarrow{p_1} Q)$ である：

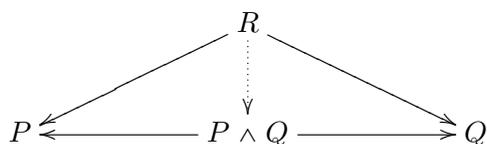
$$P \xleftarrow{p_0} R \xrightarrow{p_1} Q$$

まずは、重みも多重辺もない、ただの有向グラフ C で考えよう。そのような例として、論理式たちのなすグラフがある。論理式たちのなすグラフにおいては、この錘は、 $R \vdash P$ と $R \vdash Q$ が両方証明できることを意味する。言い換えれば、

$$\begin{aligned} & (R \rightarrow P, R \rightarrow Q) \text{ が錘である} \\ \iff & \text{論理式 } R \text{ を仮定すれば論理式 } P \text{ と } Q \text{ が両方とも証明できる。} \end{aligned}$$

さて、図式の極限とは、最もギリギリ錘になっているものことだった。すると、図式 $\{P, Q\}$ の極限というのは、 P, Q を両方とも証明できるギリギリということであるが、これはどんな論理式であろうか。その答えは簡単で、 P, Q を両方とも証明できるギリギリは “ P かつ Q ” つまり $P \wedge Q$ である。実際、どんな錘 $(R \rightarrow P, R \rightarrow Q)$ を取ってきても、以下の図式が論理式のグラフの中で

は成立しているはずである．



つまり，図式の下部については， $P \wedge Q$ を仮定すれば P と Q を両方とも証明できていることを意味し，図式の上部については， R を仮定して P と Q を両方とも証明できるならば， R を仮定して $P \wedge Q$ を証明できることを意味する．以上より， $(P \wedge Q \rightarrow P, P \wedge Q \rightarrow Q)$ が 2 点離散グラフ型図式 $\{P, Q\}$ の極限であることが示された．

より一般に，論理式たちのなすグラフにおいて， n 点離散グラフ型図式 $\{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ に対して， $(P_0 \wedge P_1 \wedge \dots \wedge P_{n-1} \rightarrow P_i)_{i < n}$ がその極限となることが示される．

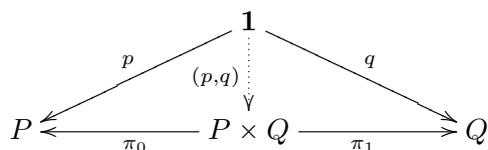
つづいて，集合と関数のなすグラフ Set について考えてみよう．このグラフにおいては，頂点は集合であり，辺は関数である．Set においては， $1 = \{\bullet\}$ という便利な頂点があるので，グラフ理論に慣れるまではこれを利用すると考えやすい．Set における辺 $1 \xrightarrow{x} A$ は， A の元を 1 つ取り出す行為 $x(\bullet) \in A$ である．つまり，辺 $1 \xrightarrow{x} A$ を元 (element) $x \in A$ と同一視する．

$$\text{辺 } 1 \xrightarrow{x} A \approx \text{元 } x \in A.$$

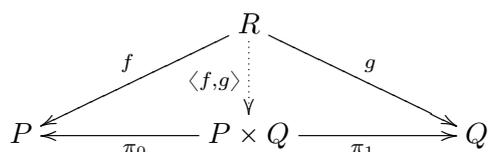
さて，Set における 2 点離散グラフ $\{P, Q\}$ 上の錘として，たとえば次のようなものがある．

$$P \xleftarrow{p} 1 \xrightarrow{q} Q$$

これは， P の元 p と Q の元 q を選んできていることと同等である．すると，対 (p, q) を $P \times Q$ からまとめて取り出して，そこから $\pi_0(p, q) = p$ と $\pi_1(p, q) = q$ を取り出す手続きを行っても同じことである．



つまり，錘 $P \xleftarrow{\pi_0} P \times Q \xrightarrow{\pi_1} Q$ は錘 $P \xleftarrow{p} 1 \xrightarrow{q} Q$ より内側にあるようだ．実際，これが 2 点離散グラフ $\{P, Q\}$ 上の錘のうちで最も内側にある．具体的には，錘 $P \xleftarrow{f} R \xrightarrow{g} Q$ に対して， $\langle f, g \rangle: R \rightarrow P \times Q$ を $\langle f, g \rangle(x) = (f(x), g(x))$ によって定義すれば，以下が成立していることは容易に確かめられる．



つまり，グラフ Set における 2 点離散グラフ $\{P, Q\}$ の極限とは，直積 $(P \times Q; \pi_0, \pi_1)$ である．もっと大きなサイズの離散グラフ $\{P_i\}_{i \in I}$ が与えられても，その極限が直積 $(\prod_{i \in I} P_i; \pi_i)_{i \in I}$

であることは容易に確かめられる．このため，離散グラフ型図式の極限は積 (*product*) と呼ばれる．特に 2 点離散グラフ型図式の極限は二項積 (*binary product*) と呼ばれる．

等化子: つづいて， $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図式の極限について考察してみよう．先ほどと同様に Set で考えてみる．たとえば，Set における次の $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図式を考えよう．

$$\mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{x \mapsto x^2 - 5x + 6} \\ \xrightarrow{x \mapsto 0} \end{array} \mathbb{R}$$

この図式に対する錘において，上のルートと下のルートどちらを通っても同じ値にならなければならない．両方のルートの値が等しいということは， $x^2 - 5x + 6 = 0$ であるということであるが， $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ であるから，解は $x = 2$ と $x = 3$ である．つまり，上の $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図式の頭に $1 \xrightarrow{2} \mathbb{R}$ や $1 \xrightarrow{3} \mathbb{R}$ を加えたものは錘になる．それでは，上の $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図式の極限とは何かと言えば，上の等式の解全体 $\{2, 3\}$ である．

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ \downarrow f & \searrow f & \\ \{2, 3\} & \hookrightarrow & \mathbb{R} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{x \mapsto x^2 - 5x + 6} \\ \xrightarrow{x \mapsto 0} \end{array} \mathbb{R}$$

上の図式について説明しておくとして，もし $Z \xrightarrow{f} \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ が錘ならば，上ルートと下ルートの値が等しくなければならないので， $f(z) = x$ の値は必ず等式 $x^2 - 5x + 6 = 0$ を満たす．つまり， $f(z) \in \{2, 3\}$ であるから，左端の辺 $Z \xrightarrow{f} \{2, 3\}$ があるということである．

一般に，Set における図式 $X \rightrightarrows Y$ の極限は次のようになる．

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} \hookrightarrow X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

一般に， $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図式の極限は等化子 (*equalizer*) と呼ばれる．

プルバック: つづいて， $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ 型図の極限について考察しよう．まずは Set における次の $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ 型図を見る．

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \downarrow g & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

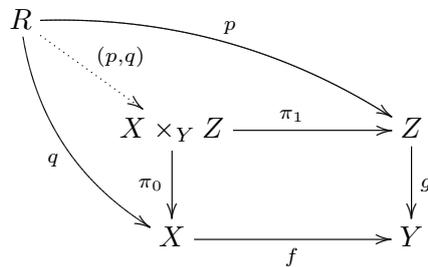
この図式 $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow^g Z$ の錘を作るために，どんな頂点 P と辺を加えればよいだろうか．とりあえず，まずは $P = 1$ で考えてみるとよい．錘になるためには，すべてのパスの重みが等しくなければならない．

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{z} & Z \\ \downarrow x & \searrow & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

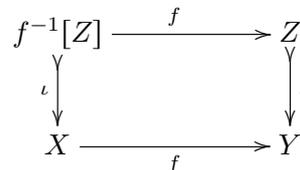
ただし, 対角辺 $1 \rightarrow Y$ については, $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{f} Y$ あるいは $1 \xrightarrow{z} Z \xrightarrow{g} Y$ から自動的に決まるので, 対角辺は省略してもよい. 1 を始点とする右回りルートと左回りルートの重みが等しくなるということは, $f(x) = g(z)$ ということである. いま, 錘自体は $X \xleftarrow{x} 1 \xrightarrow{z} Z$ の部分であるから, これは対 $(x, z) \in X \times Z$ を選んでいることと同一視できる. 以上より, 図式 $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z$ に対する頭を 1 とする錘とは, $f(x) = g(z)$ を満たす対 $(x, z) \in X \times Z$ である. つまり, 以下の集合から元を選んでいる.

$$X \times_Y Z = \{(x, z) \in X \times Z : f(x) = g(z)\}.$$

実際, これが図式 $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z$ の極限を与える.

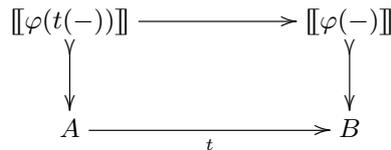


ちなみに $Z \subseteq Y$ とし, $\iota: Z \rightarrow Y$ を包含写像とした図式 $X \xrightarrow{f} Y \supseteq Z$ の極限を考えると, $X \times_Y Z = \{(x, z) \in X \times Z : f(x) = z\} \simeq f^{-1}[Z]$ となる. つまり, $X \xleftarrow{\iota} f^{-1}[Z] \xrightarrow{f} Z$ が求める極限である.



一般に, $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ 型図の極限は, プルバック (pullback) と呼ばれる.

例 2.3 (代入とプルバック). 論理学の文脈では, 項の代入などをプルバックを用いて表すことができる. 集合 B の元 x をパラメータに持つ 1 変数論理式 $\varphi(x)$ が与えられたとする. このとき, 論理式 $\varphi(x)$ は, B の部分集合 $\llbracket \varphi(-) \rrbracket = \{x \in B \mid \varphi(x) \text{ は真}\}$ と同一視できる. さらに, A の元をパラメータに持つ項 $t: A \rightarrow B$ を論理式 $\varphi(x)$ に代入したものを考えると, $\varphi(t(x))$ は A の元をパラメータに持つ 1 変数論理式であると考えられる. この $\varphi(t(x))$ については, A の部分集合 $\llbracket \varphi(t(-)) \rrbracket = \{x \in A \mid \varphi(t(x)) \text{ は真}\}$ であるとみなせる. しかし, よく注目してみれば, $\llbracket \varphi(t(-)) \rrbracket = \{x \in A : \varphi(t(x))\} = \{x \in A : t(x) \in \llbracket \varphi \rrbracket\} = t^{-1} \llbracket \varphi \rrbracket$ となっていることがわかる.



「無」の極限: 空な図式の極限についても議論しておこう. 空な図式とは, つまり特に何も無いことである. そして, 空な図式上の錘は何もないものの頭に頂点を 1 つ加えることであるから, つ

まり頂点一点である．空な図式の極限とは，空上の錘（つまり頂点 α ）であり，他の如何なる空上の錘（頂点 z ）からも辺が一意に存在するものことである．

$$z \longrightarrow \alpha$$

しかし，これは α が終対象と言っていることに他ならない．つまり，空な図式の極限とは，終対象のことである．

有限極限： グラフ C が J 型図の極限を持つとは， C における任意の J 型図式の極限が存在することである．与えられた グラフ がどのような型の極限を持つかを調べるためには，ある形状の極限から他の極限を作る方法を知っておくと便利である．たとえば，まずは次を確認してみよう．

$$[\emptyset \text{ 型図の極限をもつ}] + [\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \text{ 型図の極限をもつ}] \implies [\bullet \bullet \text{ 型図の極限をもつ}] .$$

混乱を招くのを防ぐために，ここからは グラフ の別称である圏という用語を用いる．

命題 2.4. 終対象とプルバックを持つ任意の圏は二項積を持つ．

Proof. \emptyset 型図の極限（つまり終対象 1）を持ち，さらに $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ 型図の極限（つまりプルバック）を持つと仮定しよう．さて，図式の辺の終点を終対象 1 にした場合，特にそれは何も情報を持たない．つまり，終点を終対象 1 にした辺 $\bullet \rightarrow 1$ はあってもなくても同じであるから，図式から辺 $\rightarrow 1$ を取り除いたものは，元の図式と全く等しい．すると，プルバック図式の中央を終対象 1 に変えたもの $\bullet \rightarrow 1 \leftarrow \bullet$ は，2 点離散グラフ型の図式と全く等しいから，その極限は二項積である． \square

また，Set におけるプルバックの構成から予想は付くかもしれないが，プルバックは二項積と等化子から自然に作られる．つまり，次を証明してみよう．

$$[\bullet \bullet \text{ 型図の極限をもつ}] + [\bullet \rightrightarrows \bullet \text{ 型図の極限をもつ}] \implies [\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \text{ 型図の極限をもつ}]$$

命題 2.5. 二項積と等化子を持つ任意の圏はプルバックを持つ．

Proof. $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ 型図 $x \xrightarrow{a} y \xleftarrow{b} z$ が与えられたとする．まず，2 点グラフ型図 x, z の 2 項積 $x \xleftarrow{\pi_0} x \times z \xrightarrow{\pi_1} z$ を作り，次に $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図 $a \circ \pi_0, b \circ \pi_1: x \times z \rightrightarrows y$ の上の錘 $\alpha \xrightarrow{p} x \times z$ を考える．

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \xrightarrow{p} & x \times z & \xrightarrow{\pi_1} & z \\ & & \pi_0 \downarrow & & \downarrow b \\ & & x & \xrightarrow{a} & y \end{array}$$

これは， $(\alpha \xrightarrow{\pi_0 \circ p} x, \alpha \xrightarrow{\pi_1 \circ p} z)$ が $x \xrightarrow{a} y \xleftarrow{b} z$ 上の錘であるということに他ならない．したがって， $a \circ \pi_0, b \circ \pi_1: x \times z \rightrightarrows y$ の極限とは $x \xrightarrow{a} y \xleftarrow{b} z$ の極限である． \square

その他の似たような例として、次も確認してみよう。

$$[\bullet\bullet\text{型図の極限をもつ}] + [\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet\text{型図の極限をもつ}] \implies [\bullet \rightrightarrows \bullet\text{型図の極限をもつ}] .$$

命題 2.6. 二項積とプルバックを持つ任意の圏は等化子を持つ。

Proof. 圏が $\bullet\bullet$ 型図の極限 (二項積) と $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ 型図の極限 (プルバック) を持つとしよう。いま, $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図 $a, b: x \rightrightarrows y$ が与えられたとしたら, この図の代わりに $x \xrightarrow{\langle a, b \rangle} y \times y \xleftarrow{\langle 1, 1 \rangle} y$ を考え, この図式の錘を $(\alpha \xrightarrow{p} x, \alpha \xrightarrow{q} y)$ としよう。

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \xrightarrow{q} & y \\ p \downarrow & & \downarrow \langle 1, 1 \rangle \\ x & \xrightarrow{\langle a, b \rangle} & y \times y \end{array}$$

このとき, $\alpha \xrightarrow{p} x \xrightarrow{\langle a, b \rangle} y \times y \xrightarrow{\pi_0} y = \alpha \xrightarrow{q} y \xrightarrow{\langle 1, 1 \rangle} y \times y \xrightarrow{\pi_0} y$ であるが, つまり $\alpha \xrightarrow{p} x \xrightarrow{a} y = \alpha \xrightarrow{q} y$ ということである。同様に $\alpha \xrightarrow{p} x \xrightarrow{b} y = \alpha \xrightarrow{q} y$ も導かれるから, $\alpha \xrightarrow{p} x \xrightarrow{a} y = \alpha \xrightarrow{p} x \xrightarrow{b} y$ を得る。言い換えれば, α は $a, b: x \rightrightarrows y$ の錘ということである。まとめると, $x \xrightarrow{\langle a, b \rangle} y \times y \xleftarrow{\langle 1, 1 \rangle} y$ の錘とは, $a, b: x \rightrightarrows y$ の錘である。特に, $x \xrightarrow{\langle a, b \rangle} y \times y \xleftarrow{\langle 1, 1 \rangle} y$ の極限とは, $a, b: x \rightrightarrows y$ の極限である。□

ここまで極小数の形状の図の極限について議論してきたが, 実はこれだけの形状の極限をうまく組み合わせるだけで, ありとあらゆる有限 グラフ 型図の極限を生み出すことができる。具体的には, 以下の2つ

$$[\emptyset\text{型図の極限をもつ}] + [\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet\text{型図の極限をもつ}]$$

$$[\emptyset\text{型図の極限をもつ}] + [\bullet\bullet\text{型図の極限をもつ}] + [\bullet \rightrightarrows \bullet\text{型図の極限をもつ}]$$

のどちらか一方の条件を満たすのであれば, あらゆる有限 グラフ 型図の極限をもつことを示せる。つまり, 2種類か3種類の小さな図の極限を持つことさえ示せば十分なのである。

圏 C が有限完備 (*finitely complete*) であるとは, 任意の有限 グラフ D に対して, C における任意の D 型図が極限を持つことを意味する。

定理 2.7. 圏 C について, 以下の条件は同値である。

1. C は有限完備である。
2. C は終対象とプルバックを持つ。
3. C は終対象と二項積と等化子を持つ。

Proof. (1) から (2) と (3) が導けることは自明である . (2) から (3) が導けることは命題 2.4 と 2.6 から従う . 同様に (3) から (2) が導けることは命題 2.5 から従う . 実際 , 命題 2.5 のアイデアを拡張することによって , (3) から (1) の証明をしよう .

空でない有限 グラフ J について , J 型図 , つまり グラフ 準同型 $\delta: J \rightarrow C$ を考えよう . まず , J の頂点を $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ と並べる . 次に , C において二項積を有限回繰り返して , 有限積 $\prod_{i \leq n} \delta(v_i) := \delta(v_0) \times \delta(v_1) \times \dots \times \delta(v_n)$ が C に存在することを示せる . つづいて , 各辺 $\delta(v_j) \xrightarrow{\delta(e)} \delta(v_k)$ について , $t_e = \delta(e) \circ \pi_j$ として定義する :

$$\begin{array}{ccc} & \prod_{i \leq n} \delta(v_i) & \\ \pi_j \swarrow & & \searrow t_e \\ \delta(v_j) & \xrightarrow{\delta(e)} & \delta(v_k) \end{array}$$

この上の頂点が錘であるという性質を満たすためには , 第 k 射影 π_k と t_e が等しくなければならない . つまり , $\pi_k = \pi_{\text{cod}(e)}$ と t_e を等化させる必要がある . いま , J の辺集合 E は有限なので , 再び C における二項積を有限回繰り返して , $\prod_{e \in E} \delta(v_{\text{cod}(e)})$ を得る . すると , いま次のような 2 つの辺がある .

$$\prod_{i \leq n} \delta(v_i) \begin{array}{c} \xrightarrow{(t_e)_{e \in E}} \\ \xrightarrow{(\pi_{\text{cod}(e)})_{e \in E}} \end{array} \prod_{e \in E} \delta(v_{\text{cod}(e)})$$

この $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図上の錘の頭が (α, p) ならば , J 型図 δ の頭に $(\alpha, \pi_i \circ p)_{i \leq n}$ を加えたものは δ の錘になっている .

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ & p \downarrow & \\ & \prod_{i \leq n} \delta(v_i) & \\ \pi_j \swarrow & & \searrow t_e \\ \delta(v_j) & \xrightarrow{\delta(e)} & \delta(v_k) \end{array}$$

正確には , 下の内側の三角形だけを見ても可換図式ではないが , 頭の α からスタートすれば , $\delta(v_k)$ へ向かうルートはいずれも等しくなる . つまり , $\alpha \xrightarrow{p} \bullet \xrightarrow{t_e} \bullet = \alpha \xrightarrow{p} \bullet \xrightarrow{\pi_k} \bullet$ と等化されており , よって , t_e の定義より $\alpha \xrightarrow{p} \bullet \xrightarrow{\pi_j} \bullet \xrightarrow{\delta(e)} \bullet = \alpha \xrightarrow{p} \bullet \xrightarrow{\pi_k} \bullet$ を得る .

以上より , 上の $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図の等化子を取れば , そこから J 型図 δ の極限を得られることが結論付けられた . いま , 空でない グラフ 型図の極限を考えていたが , 空グラフ型図の極限は終対象である . まとめると , 終対象 , 二項積と等化子があれば , 任意の有限 グラフ 型図の極限がある , つまり有限完備である . \square

一般の極限: 伝統的な数学においては , 当然ながら , 極限といえば無限極限である . よく用いられるものは , 左方向に無限に伸びる直線上の グラフ

$$\dots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

の型の図に対する極限である．この グラフ をしばしば ω^{op} と書く．この形の無限 グラフ 型図式に対する極限が多用されるため，伝統的な数学においては，圏的な極限は逆極限 (*inverse limit*) の名前で呼ばれている．

無限 グラフ 型図式の極限についても，そんなにたくさんの グラフ の形状を考える必要はない．実際，離散グラフ型図式の極限と $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図式の極限を持つことさえ示せば，すべての形状の図式に対して極限を持つことが導かれる．

$$[\text{離散グラフ型図の極限をもつ}] + [\bullet \rightrightarrows \bullet \text{ 型図の極限をもつ}] \implies [\text{すべての極限をもつ}]$$

圏 C が完備 (*complete*) であるとは，任意の小さい グラフ D に対して， C における任意の D 型図が極限を持つことを意味する．ここで， グラフ の大きさについては，第 8.1 節を見よ．

定理 2.8. 圏 C について，以下の条件は同値である．

1. C は完備である．
2. C は任意の積と等化子を持つ．

Proof. (1) から (2) は自明である．(2) から (1) については，定理 2.7 の (3) から (1) への証明における有限積の部分を無限積に変えるだけである． \square

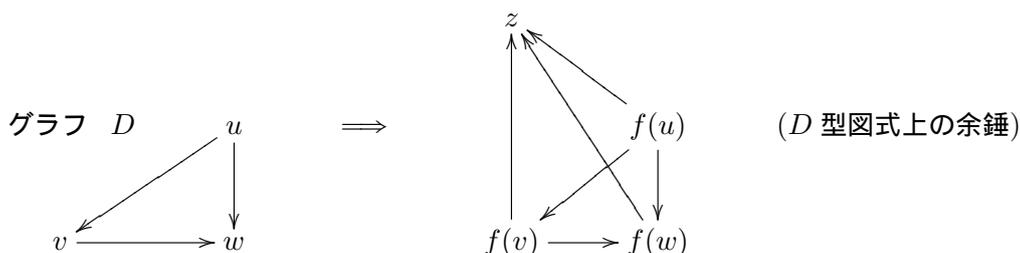
具体例として，集合と関数の圏 Set においては， J 型図 $\delta: J \rightarrow \text{Set}$ の極限は次によって与えられる．

$$\left\{ (p_z) \in \prod_{z \in J} \delta(z) : (\forall x \xrightarrow{a} y \in J) \quad p_x \xrightarrow{\delta(a)} p_y \right\}.$$

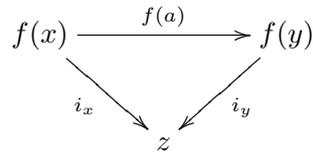
この定義は，圏の頂点 $\delta(x)$ の中身から要素 p_x を取り出す，という操作をしている．一般に，圏の頂点 v の中身を取り出すという操作はできないので，この極限の定義は一般の圏では使えないことに注意しよう．

2.2. グラフの中の図の余極限

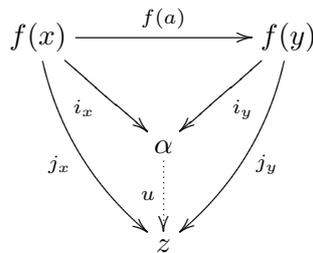
ここまでは錘という特殊な形状の部分 グラフ について見てきたが，つづいて， C の中の D 型図式に対して， C の頂点 z を尾に一つ加えた「余錘」というものに注目しよう．



つまり、錘の場合には追加される頂点 z が始点であったが、余錘の場合には追加される頂点 z は終点となっている。具体的には、 D 型図式 $f: D \rightarrow C$ が与えられたとき、その上の余錘 (cocone) とは、 $f[D]$ の各頂点から C のある頂点 z へ向かう辺の族 $(f(d) \xrightarrow{i_d} z)_{d \in D}$ であって、 D のどの辺 $x \xrightarrow{a} y$ を見ても、次の図式を可換にするものである。



錘と同じように、余錘にも極限のようなものが存在する。 D 型図式 f の余極限 (colimit) とは、 f 上の余錘 $(f(d) \xrightarrow{i_d} \alpha)_{d \in D}$ であって、次の条件を満たすものである： D 上のどんな余錘 $(f(d) \xrightarrow{j_d} z)_{d \in D}$ が与えられても、 α から z への辺 $\alpha \xrightarrow{u} z$ が一意に存在して、 D のどの辺 $x \xrightarrow{a} y$ を見ても、次の図式を可換にする。



余錘と余極限については、反対 グラフ の文脈で説明ができる。グラフ G の反対 (opposite) とは、グラフ G の辺の向きをすべて反転させた グラフ G^{op} である。つまり、辺 a を反転させたものを \bar{a} と書くとすれば、

$$V_{G^{\text{op}}} = V_G, \quad E_{G^{\text{op}}} = \{v \xrightarrow{\bar{a}} u \mid u \xrightarrow{a} v \in E_G\}.$$

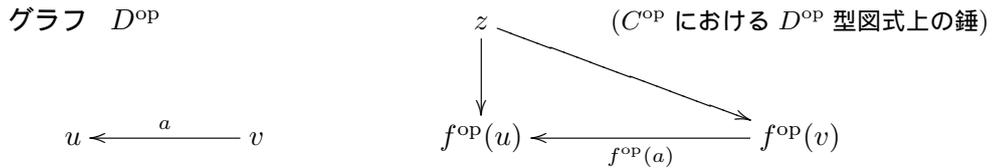
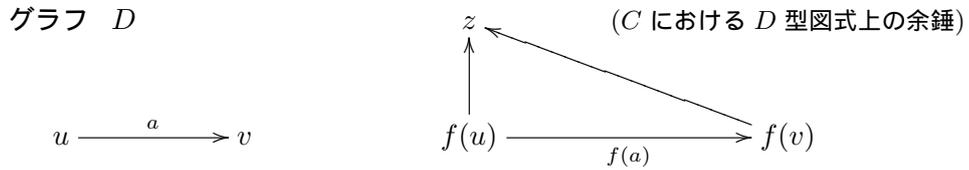
この反対化は、グラフ 準同型も反対化させられる。具体的には、グラフ 準同型 $g = (g_V, g_E): G \rightarrow H$ が与えられたとき、

$$g_V^{\text{op}}(v) = g_V(v), \quad g_E^{\text{op}}(\bar{a}) = \overline{g_E(a)}$$

と定義すれば、 $g^{\text{op}} = (g_V^{\text{op}}, g_E^{\text{op}}): G^{\text{op}} \rightarrow H^{\text{op}}$ が グラフ 準同型になることは容易に確かめられる。

グラフ C における D 型図式とは グラフ 準同型 $f: D \rightarrow C$ のことであった。これに対して、反対 グラフ 準同型 $f^{\text{op}}: C^{\text{op}} \rightarrow D^{\text{op}}$ を考えよう。つまり、 f^{op} は C^{op} における D^{op} 型図である。

る．すると， D 型図式 f の余錘とは， D^{op} 型図式 f^{op} の錘を反対化したものであることが分かる．



同様に， C における D 型図式 f の余極限は， C^{op} における D^{op} 型図式 f^{op} の極限の反対化に他ならないことがわかる．

余積（離散 グラフ 型図式の余極限）最もわかりやすいものは，離散グラフ型図式の余極限である．圏 C における 2 点離散グラフ型図式とは， C の頂点のうち 2 つ $\{P, Q\}$ を指名することであった．このとき，2 点離散グラフ型図式上の余錘とは，辺の対 $(P \xrightarrow{i_0} R, Q \xrightarrow{i_1} R)$ である：

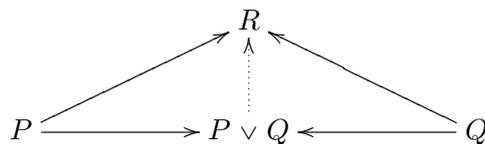
$$P \xrightarrow{i_0} R \xleftarrow{i_1} Q$$

まずは，論理式たちのなすグラフを考えてみよう．論理式たちのなすグラフにおいては，この余錘は， $P \vdash R$ と $Q \vdash R$ が両方証明できることを意味する．言い換えれば，

$(P \rightarrow R, Q \rightarrow R)$ が余錘である

\iff 論理式 P を仮定しても，論理式 Q を仮定しても，どちらでも論理式 R を証明できる．

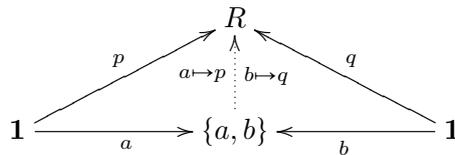
さて，図式の余極限とは，最もギリギリ余錘になっているもののことだった．すると，図式 $\{P, Q\}$ の余極限というのは， P, Q のどちらを仮定しても証明できるようなものの中でギリギリということであるが，これはどんな論理式であろうか．その答えは簡単で， P, Q のどちらを仮定しても証明できるギリギリは “ P または Q ” つまり $P \vee Q$ である．実際，どんな余錘 $(P \rightarrow R, Q \rightarrow R)$ を取ってきても，以下の図式が論理式のグラフの中では成立しているはずである．



つまり，図式の下部については， P と Q のどちらを仮定しても $P \vee Q$ を証明できていることを意味し，図式の上部については， P と Q のどちらを仮定しても R を証明できるならば， $P \vee Q$ を仮定して R を証明できることを意味する．以上より， $(P \rightarrow P \vee Q, Q \rightarrow P \vee Q)$ が 2 点離散グラフ型図式 $\{P, Q\}$ の余極限であることが示された．

より一般に，論理式たちのなすグラフにおいて， n 点離散グラフ型図式 $\{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ に対して， $(P_0 \vee P_1 \vee \dots \vee P_{n-1} \rightarrow P_i)_{i < n}$ がその余極限となることが示される．

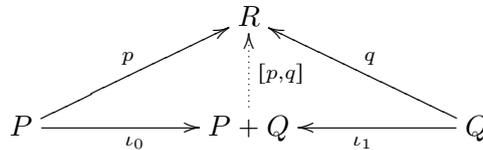
つづいて，集合と関数のなすグラフ Set について考えてみよう．このグラフにおいては，頂点は集合であり，辺は関数である． Set においては，ふたたび $1 = \{\bullet\}$ という便利な頂点を利用して考えよう．さて， Set における 2 点離散グラフ $\{1, 1\}$ 上の余錘としては，たとえば $1 \xrightarrow{p} R \xleftarrow{q} 1$ などがある．これは，2 つの元 p, q を R から選んできていることと同等である．すると，2 つの元を選べるギリギリの集合とは何かと考えると，それは 2 点集合 $\{a, b\}$ である．



一般に， Set における 2 点離散グラフ $\{P, Q\}$ の余錘 $P \xrightarrow{p} R \xleftarrow{q} Q$ は， P の元に何かの元を対応させ， Q の元に何かの元を対応させるのに十分なサイズの集合である．その中で最もギリギリなものは，たとえば P と Q の非交叉和

$$P + Q = \{(0, x) : x \in P\} \cup \{(1, y) : y \in Q\}$$

などがある．このとき，包含写像 ι_0, ι_1 を $\iota_k(z) = (k, z)$ によって定義すれば，



となる関数 $[p, q]: P + Q \rightarrow R$ が一意に存在する．実際に計算してみれば， $[p, q](0, x) = p(x)$ かつ $[p, q](1, y) = q(y)$ となることがわかる．つまり，グラフ Set における 2 点離散グラフ $\{P, Q\}$ の余極限とは，余積 $(P + Q; \iota_0, \iota_1)$ である．もっと大きなサイズの離散グラフ $\{P_i\}_{i \in I}$ が与えられても，その余極限が余積 $(\sum_{i \in I} P_i; \iota_i)_{i \in I}$ であることは容易に確かめられる．このため，離散グラフ型図式の余極限は余積 (coproduct) と呼ばれる．特に 2 点離散グラフ型図式の余極限は二項余積 (binary coproduct) と呼ばれる．

その他の余極限 本稿では詳細を省略するが，極限と同じように， \emptyset 型図， $\bullet \bullet$ 型図， $\bullet \Leftarrow \bullet$ 型図， $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ 型図の余極限が重要な役割を持つ．まず \emptyset 型図の余極限が始対象 0 であることを確認するのは難しくない． $\bullet \bullet$ 型図の余極限については，先ほど見たように余積である． $\bullet \Leftarrow \bullet$ 型図の余極限は余等化子 (coequalizer) と呼ばれ， $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ 型図の余極限はプッシュアウト (pushout) と呼ばれる．これらの余極限概念も数学において重要な役割を持つ．グラフ C が有限余完備 (finitely cocomplete) であるとは，任意の有限 グラフ D に対して， C における任意の D 型図が余極限を持つことを意味する．

いま， C における D 型図 δ の余極限とは， C^{op} における D^{op} 型図 δ^{op} の極限 (の反対化) であったことを思い出そう．つまり， C における \emptyset 型図， $\bullet \bullet$ 型図， $\bullet \Leftarrow \bullet$ 型図， $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$ 型

図の余極限の存在は、 C^{op} における \emptyset 型図、 $\bullet \bullet$ 型図、 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図、 $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ 型図の極限の存在と同値である。よって、反対グラフ C^{op} に定理 2.7 を適用することによって、以下を得る。

定理 2.9. 圏 C について、以下の条件は同値である。

1. C は有限余完備である。
2. C は始対象とプッシュアウトを持つ。
3. C は始対象と二項余積と余等化子を持つ。

無限の場合についても全く同様である。グラフ C が余完備 (*cocomplete*) であるとは、任意の小さいグラフ D に対して、 C における任意の D 型図が余極限を持つことを意味する。反対グラフ C^{op} に定理 2.10 を適用することによって、以下を得る。

定理 2.10. 圏 C について、以下の条件は同値である。

1. C は余完備である。
2. C は任意の余積と余等化子を持つ。

§ 3. 自由代数，等式理論，ローヴェア理論

3.1. 等式理論と自由代数

圏とは、多重有向グラフのパス上の合同関係による商グラフのことであった。そのようなグラフの例が、数学や情報科学において豊富に現れることをこの節では見ていこう。

合同関係による商グラフを自然に作り出すものとして、等式理論（代数的理論）と呼ばれるものがある。等式理論は、モノイドや群など、等式のリストを公理とする理論を一般化した概念である。本節では、等式理論は常にグラフとして図示できることを述べる。つまり、われわれはいつも等式理論（モノイドの公理，群の公理など）の絵を描くことができる！

そして、モノイドの理論に対して自由モノイド，群の理論に対して自由群の概念があるように、等式理論が与えられれば対応する自由代数がある。これについても、等式理論のモデル理論をグラフ図示の文脈で導入した後に自由代数の一般論を議論していく。自由代数の概念は、後の節で説明するモナドや随伴といった圏論における重要概念とも深く結びついていく。

この前段階のステップとして、まずは数理論理学（あるいは普遍代数）の言葉を用いて、等式理論の定義を与えよう。ただし、次の等式理論と項モデルの項目は、その後のローヴェア理論（等式理論のグラフ図示・圏論化）に進むための中間ステップに過ぎないので、あまり理解できなくともローヴェア理論のところまで進んでしまっても、等式理論とローヴェア理論を見比べながら読むとい

いかかもしれない。

等式理論と項モデル: 等式理論とは, 関数記号のみを言語に持ち, 項に関する等式 $s = t$ のみを公理に持つ理論である。より具体的には, まず, 等式理論の言語と項は以下によって定義される。

定義 3.1. 言語 (language) あるいはシグネチャ (signature) とは, 形式的な記号の集合 \mathcal{L} であり, さらに各 $f \in \mathcal{L}$ に対して, 引数 (arity) と呼ばれる自然数が割り当てられている。各記号 $f \in \mathcal{L}$ は関数記号と呼ばれ, f の引数が n の場合には n 変数関数記号と呼ばれる。引数 0 の関数記号はしばしば定数記号と呼ばれる。

言語 \mathcal{L} が与えられたとき, \mathcal{L} の記号以外に, 可算個の変数記号を用意する。 \mathcal{L} の項 (term) とは, 以下のように帰納的に定義される。

1. 定数記号 $c \in \mathcal{L}$ および変数記号 x は項である。
2. f が n 変数関数記号であり, t_1, t_2, \dots, t_n が項ならば, $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ は項である。

変数記号を含まない項は, 閉項 (closed term) と呼ばれる。

例 3.2 (モノイドと群の言語). モノイドの言語 \mathcal{L}_{Mon} は 2 項関数記号 $*$ と定数記号 ε からなる集合 $\{*, \varepsilon\}$ である。群の言語 \mathcal{L}_{Grp} は, $*$ と e に 1 変数関数記号 \bullet^{-1} を加えた集合 $\{*, \varepsilon, \bullet^{-1}\}$ である。通常, $*(x, y)$ を $x * y$ と略記し, $\bullet^{-1}(x)$ を x^{-1} と略記する。このとき, x, y, z, u, v が変数記号ならば, たとえば $(x * \varepsilon) * y$ は \mathcal{L}_{Mon} および \mathcal{L}_{Grp} の項であり, $(z * (u^{-1} * v)) * \varepsilon$ は \mathcal{L}_{Grp} の項であるが, \mathcal{L}_{Mon} の項ではない。また, これらは閉項ではないが, たとえば $\varepsilon * \varepsilon^{-1}$ は閉項である。

定義 3.3. \mathcal{L} を言語とし, $\text{Term}(\mathcal{L})$ を \mathcal{L} の項全体の集合とする。このとき, $\text{Term}(\mathcal{L})$ 上の 2 項関係を等式理論 (equational theory) と呼ぶ。

言い換えれば, 等式理論とは, \mathcal{L} の項の対の集合 $T \subseteq \text{Term}(\mathcal{L})^2$ である。項の対 $(s, t) \in T$ を $s =_T t$ あるいは “ $s = t$ ” と表す。

例 3.4 (モノイドの公理). モノイドの公理 T_{Mon} は, 項の等式 “ $(x * y) * z = x * (y * z)$ ” および “ $\varepsilon * x = x$ ” と “ $x * \varepsilon = x$ ” を公理に持つ理論である。群の公理 T_{Grp} には, さらに項の等式 “ $x * x^{-1} = \varepsilon$ ” および “ $x^{-1} * x = \varepsilon$ ” が含まれる。つまり, モノイドの公理 T_{Mon} と群の公理 T_{Grp} は等式理論である。

これは項上の合同関係 \approx_T を誘導する。つまり, \approx_T を以下を満たす最小の 2 項関係とする。

1. $s =_T t \implies s \approx_T t$.
2. (反射律) $t \approx_T t$.
3. (対称律) $s \approx_T t \implies t \approx_T s$.
4. (推移律) $s \approx_T t$ and $t \approx_T u \implies s \approx_T u$.

5. (変数への項の代入) x が変数記号で u が項ならば,

$$s(x) \approx_T t(x) \implies s(u) \approx_T t(u).$$

6. (関数合成) f が n 変数関数記号ならば,

$$s_1 \approx_T t_1, \dots, s_n \approx_T t_n \implies f(s_1, \dots, s_n) \approx_T f(t_1, \dots, t_n).$$

つまり, \approx_T は, 等式理論 T において証明可能な項の等式であり, 数理論理学の文脈では $s \approx_T t$ の代わりに $T \vdash s = t$ と書かれることが多い.

理論という概念に数学的な肉付けを与えるものが, モデルの概念である. たとえば, 「群の公理」という理論に対するモデルとは, 群のことであり, つまりたとえば整数の加法群 $(\mathbb{Z}, +, 0, -\bullet)$ などである. 形式的には, 数理論理学において, ある理論のモデルとは, その理論で証明可能なすべての式を満たす構造である. その前段階として, 与えられた言語上の構造概念は, 以下によって定義される.

定義 3.5. 言語 \mathcal{L} の集合 U における解釈 $-^M$ とは, 次によって定義されるものである.

1. 各定数記号 $c \in \mathcal{L}$ の解釈は, 集合 U の元 $c^M \in U$ である.
2. 各 n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ の解釈は, U 上の関数 $f^M: U^n \rightarrow U$ である.

集合 U と解釈 $-^M$ の対 $M = (U, -^M)$ は \mathcal{L} -構造 (\mathcal{L} -structure) と呼ばれる. 集合 U は \mathcal{L} -構造 M の領域と呼ばれ, しばしば $|M|$ と書かれる.

例 3.6. モノイドの言語 $\mathcal{L}_{\text{Mon}} = \{*, e\}$ を考える. 領域を自然数全体の集合 \mathbb{N} とし, $*$ の解釈 $*^N$ を自然数の和 $+$ とし, e の解釈 e^N を 0 とする. このとき, $N = (\mathbb{N}, -^N) = (\mathbb{N}, *^N, e^N) = (\mathbb{N}, +, 0)$ は \mathcal{L}_{Mon} -構造である. また, 別の解釈として, $*$ の解釈 $*^M$ を自然数の積 \times とし, e の解釈 e^M を 1 とする. このとき, $M = (\mathbb{N}, -^M) = (\mathbb{N}, *^M, e^M) = (\mathbb{N}, \times, 1)$ もまた \mathcal{L}_{Mon} -構造である.

関数記号の解釈 f^M が定まると, 項の解釈 t^M も自動的に定まる. これを利用して, 等式理論のモデルの概念が定義される. 具体的な定義は次のように与えられる.

定義 3.7. f が n 変数関数記号であり, t_1, t_2, \dots, t_n が k 変数項であるとする. 帰納的に, $t_1^M, t_2^M, \dots, t_n^M: M^k \rightarrow M$ が既に定義されていると仮定する. このとき, 項 $f(t_1, \dots, t_n)$ の M における解釈を以下のように定義する.

$$f(t_0, t_1, \dots, t_n)^M(\bar{x}) := f^M(t_0^M(\bar{x}), t_1^M(\bar{x}), \dots, t_n^M(\bar{x})).$$

\mathcal{L} -構造 $M = (|M|, -^M)$ が与えられたとき, 閉項 s, t について $s^M, t^M \in |M|$ となる. \mathcal{L} -構造 M が等式理論 T のモデル (model) であるとは, 任意の閉項 s, t について, $s = t$ が \mathcal{T} の公理から導かれるならば, $s^M = t^M$ が成り立つことを意味する.

$$s \approx_T t \implies s^M = t^M.$$

たとえばモノイドの公理 T_{Mon} のモデルとはつまりモノイドのことであり、群の公理 T_{Grp} のモデルとは群である。

例 3.8. 例 3.6 であげた \mathcal{L}_{Mon} -構造 $N = (\mathbb{N}, -^N)$ と $M = (\mathbb{N}, -^M)$ は両方ともモノイドの理論 T_{Mon} のモデルである。つまり、 $N = (\mathbb{N}, -^N) = (\mathbb{N}, +, 0)$ については、 \mathbb{N} 上の加法 $+$ が結合律を満たし、 0 が加法の単位元となる。同様に、 $M = (\mathbb{N}, -^M) = (\mathbb{N}, \times, 1)$ については、 \mathbb{N} 上の乗法 \times が結合律を満たし、 1 が乗法の単位元となる。

例 3.9. 群の言語 $\mathcal{L}_{\text{Grp}} = \{*, e, \bullet^{-1}\}$ に対して、 \mathbb{Z} を自然数全体の集合とし、 $*$ の解釈 $*^{\mathbb{Z}}$ を整数の和、 e の解釈 $e^{\mathbb{Z}}$ を 0 とし、 \bullet^{-1} の解釈 $(\bullet^{-1})^{\mathbb{Z}}$ を符号の反転、つまり $(x^{-1})^{\mathbb{Z}} := -x$ とする。このとき、 \mathcal{L}_{Grp} -構造 $Z = (\mathbb{Z}, -^{\mathbb{Z}})$ は群の理論 T_{Grp} のモデルである。つまり、 \mathbb{Z} 上の加法 $+$ が結合律を満たし、 0 が加法の単位元となり、 $x \mapsto -x$ は加法の逆元を与える。

等式理論は最も簡明な理論なので、モデルもまた非常に単純明快である。さて、代数学の分野では、代数系の特殊なモデルとして、「自由」という接頭語の付いたものがある。たとえば、自由モノイドや自由群などである。一般の等式理論 T のモデルの中にも、特に「自由」代数と呼ばれるものがあり、これはしばらく本稿の主役を演じることとなる。

自由代数の定義は、言語の拡張というステップを経て行われる。より明示的には、集合 A が与えられているとき、各 $a \in A$ に対して定数記号 \check{a} を言語 \mathcal{L} に加える。つまり、言語

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{\check{a} : a \in A\}$$

を考える。この言い回しだと \mathcal{L} に A を加えたものようであるが、自由代数の場合はどちらかといえば逆であり、 A に \mathcal{L} を付加したものの方がよい。つまり、これから定義するものは、 A が生成する自由代数というものである。われわれはまず A というプレーンな対象を取り扱っており、言語 \mathcal{L} に含まれる演算をそこに組み込むことによって、その構造を強化するのである。

いま、言語 \mathcal{L} の理論 T が与えられているとしよう。この理論は、そのまま言語 \mathcal{L}_A の理論だと思えることができる。ここで、定数記号 \check{a} に関する公理は一切加えない。このとき、上と全く同じ定義によって、 \mathcal{L}_A -項上の同値関係 \approx_T を与えられる。公理は付加されていないので、本質的に新しい等式は増えないが、変数への項の代入によって、 $s(\check{a}) \approx_T t(\check{a})$ のように、元からある等式の中に新しい定数を代入した等式が加わっていることには注意する。

A が生成する自由代数とは、 T をこのように \mathcal{L}_A -理論として考えた場合の最小モデルである。その正体について具体的に議論すると、等式理論 T のモデルとは、各項 t に対する解釈 t^M を持ち、その解釈が項上の合同関係 \approx_T に従うものであった。そのようなモデルを作り出す最も単純な方法は、閉項全体を同値関係 \approx_T で割るという手法であり、これが自由代数の正体である。

定義 3.10. 言語 \mathcal{L} の等式理論 T が与えられているとする。このとき、与えられた集合 A について、 \mathcal{L}_A -閉項全体 $\text{Term}_{\text{cl}}(\mathcal{L}_A)$ を同値関係 \approx_T で割った構造 $F_T(A)$ を A が生成する自由 T -代数 (*free T -algebra*) と呼ぶ。つまり、

- $F_T(A)$ の領域は \mathcal{L}_A -閉項全体の \approx_T による商集合である :

$$T(A) := \text{Term}_{\text{cl}}(\mathcal{L}_A) / \approx_T .$$

つまり, 領域 $T(A)$ の各元は, 項の同値類 $[t] := \{s \in \text{Term}_{\text{cl}}(\mathcal{L}_A) \mid s \approx_T t\}$ である .

- 各 n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ の解釈 $[f]: T(A)^n \rightarrow T(A)$ を

$$[f]([t_1], \dots, [t_n]) := [f(t_1, \dots, t_n)]$$

によって定義する . 合同関係 \approx_T の関数合成の性質より, $[s_i] = [t_i]$ ならば $[f(\bar{s})] = [f(\bar{t})]$ であるから, これは矛盾なく関数 $[f]: T(A)^n \rightarrow T(A)$ を与える .

- A の生成する自由 T -代数とは, 項モデル $F_T(A) = (T(A), [-])$ のことである .

例 3.11. 言語 $\{*, \varepsilon\}$ の等式理論 T_{Mon} , つまりモノイドの公理を考える . このとき, 集合 A の生成する自由 T_{Mon} -代数とは, A の生成する自由モノイド $(A^*, *, \varepsilon)$ に等しい . 同様に群の公理 T_{Grp} に対して, 集合 A の生成する自由 T_{Grp} -代数とは, A の生成する自由群に等しい . 群の公理 T_{Grp} に更に等式の集合 R を公理に加えた理論 T_R を考える, このとき, 集合 A の生成する自由 T_R -代数とは, $\langle A \mid R \rangle$ によって表示される群である .

さて, 数学的構造あるところに準同型がある . これまでグラフ準同型やモノイド準同型などを取り扱ってきた . 他にも群準同型など様々な準同型があるが, それらの共有する性質を抽出しておきたい . 数理論理学においては, 言語 \mathcal{L} に対して, \mathcal{L} -構造の間の準同型の定義は以下のように与えられている .

定義 3.12. \mathcal{L} を言語とし, M, N を \mathcal{L} -構造とする . 写像 $h: M \rightarrow N$ が準同型 (homomorphism) であるとは, 任意の n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ と元 $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ に対して, 以下を満たすことである .

$$h(f^M(a_1, \dots, a_n)) = f^N(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

例 3.13. モノイドの言語 $\mathcal{L}_{\text{Mon}} = \{*, e\}$ を考える . 2 変数関数記号 $*$ と 0 変数関数記号 e に上の定義を適用すれば, モノイド $(|M|, *^M, e^M)$ から $(|N|, *^N, e^N)$ への準同型 h とは, 以下を満たすものである .

$$h(a_1 *^M a_2) = h(a_1) *^N h(a_2), \quad h(e^M) = e^N.$$

右の等式は, e を 0 変数関数記号として強調したもので, 通常の記法を用いれば, $h(e^M) = e^N$ である . つまり, モノイドの言語 $\mathcal{L}_{\text{Mon}} = \{*, e\}$ における準同型は, モノイド準同型である . 同様に, 群の言語 $\mathcal{L}_{\text{Grp}} = \{*, e, \bullet^{-1}\}$ における準同型は, 群準同型である .

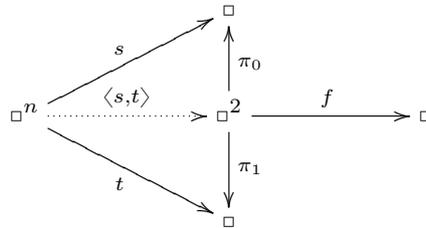
上ではグラフ準同型について触れたが, 多重有向グラフの理論は等式理論ではないので, それを取り扱うには, もう少し広い枠組みが必要になる (後の多ソート等式理論の項目を参照) . そのような広い枠組みの中では, 構造間の準同型は「自然変換」と呼ばれるものとなり, これは圏の理論において主要な役割を担う .

3.2. ローヴェア理論

等式理論のグラフ表示法として、ローヴェア理論 (Lawvere theory) と呼ばれるものがある。これは、各 n 変数関数記号 f をグラフの辺 $\square^n \xrightarrow{f} \square$ として取り扱う、という発想が基本となる。ここで四角形 \square は固定した任意の頂点である。モノイドの理論であれば、単位元 e および積演算 $*$ は、次のように書かれる。

$$\square^0 = \mathbf{1} \xrightarrow{e} \square, \quad \square^2 \xrightarrow{*} \square$$

ここまでの議論をまとめよう。言語 \mathcal{L} が与えられれば、可算個の頂点 $\square^0, \square^1, \square^2, \dots$ と関数記号毎に辺 $\square^n \xrightarrow{f} \square$ をもつ多重有向グラフ $G_{\mathcal{L}}$ を考えることができる。そして、このグラフにおけるパスが、言語 \mathcal{L} の項に相当する。正確には、たとえば、 n 変数項 s, t に 2 変数関数記号 f を適用して新しく項 $f(s, t)$ を作るという操作は以下によって図示される。



この中央のパス $f \circ \langle s, t \rangle$ が項 $f(s, t)$ を表す。ここで、 $\langle s, t \rangle$ は 2 項積、つまり $\bullet \bullet$ 型図の極限におけるものである。つまり、この議論を行うために、頂点 $\square^0, \square^1, \square^2, \dots$ には、直積の条件を満たしていることを要求される。もし \square が変数記号の集合であるとすれば、この項の定義は、等式理論あるいは述語論理におけるものと全く同じである。まずは、「いろいろな項をグラフとして描く」ということに慣れていくことにしよう。

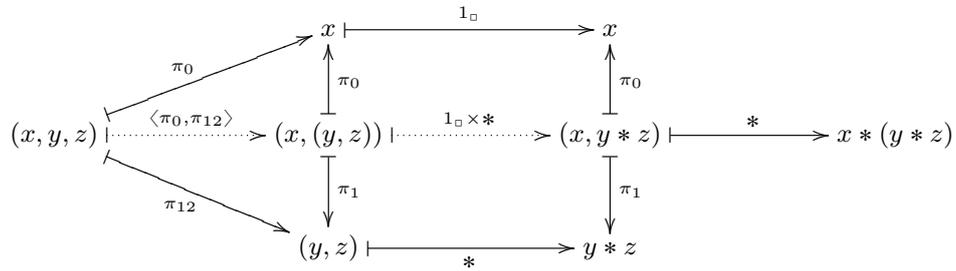
その前に、積に関する便利な記法として、以下を用いる。辺 $a: x \rightarrow y$ と $b: x' \rightarrow y'$ に対して、 $a \times b: x \times x' \rightarrow y \times y'$ を $a \times b = \langle a \circ \pi_0, b \circ \pi_1 \rangle$ として定義する：

$$\begin{array}{ccccc} x & \xleftarrow{\pi_0} & x \times x' & \xrightarrow{\pi_1} & x' \\ a \downarrow & & \downarrow a \times b & & \downarrow b \\ y & \xleftarrow{\pi_0} & y \times y' & \xrightarrow{\pi_1} & y' \end{array}$$

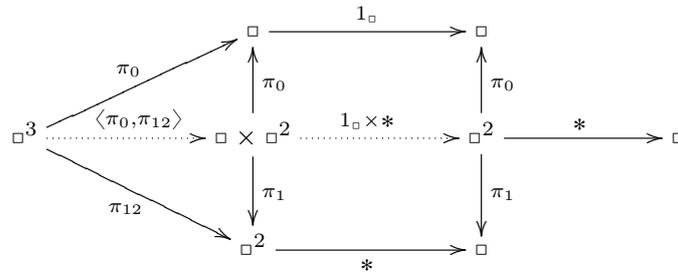
例 3.14 (項 $x * (y * z)$ を描く). 2 変数関数記号 $*$ のみからなる言語 $\{*\}$ を考える。グラフの理論においては、2 変数関数記号 $*$ は辺 $\square^2 \xrightarrow{*} \square$ であるとみなされる。項 $t(x, y, z) = x * (y * z)$ の構成は、次のようなパス $(x, y, z) \xrightarrow{t} x * (y * z)$ と考えることができる。

変数記号 (x, y, z) を用意する; 項の構成 $(y, z) \xrightarrow{*} y * z$; 項の構成 $(x, y * z) \xrightarrow{*} x * (y * z)$.

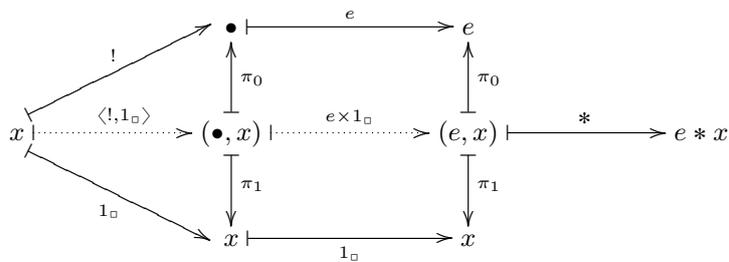
この項 $t(x, y, z) = x * (y * z)$ の構成レシビは，変数記号を用いれば以下のように書き下せる．



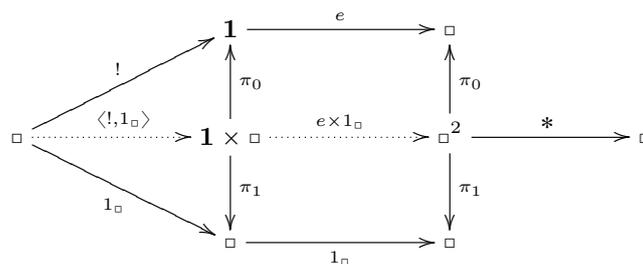
ただし，左端から右端へ向かう中央のパスが項 $x * (y * z)$ の本体であり，常にこの中央のパスに注目しよう．上下のパスは補助的なデータであり，以後はしばしば省略されることがある．実際には， \square を変数記号の集合としては取り扱えないかもしれないので，上図のレシビから変数記号を除去し，この背後にあるグラフ構造を明示化すれば，以下のようなものである．



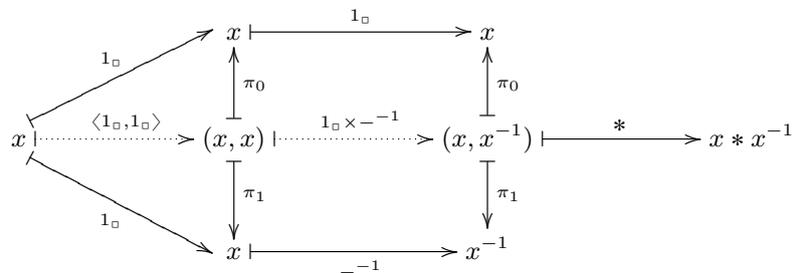
例 3.15 (項 $e * x$ を描く)．モノイドの言語 $\{e, *\}$ を考える．項 $t(x) = e * x$ の構成レシビは，変数記号を用いれば以下のように書き下せる．



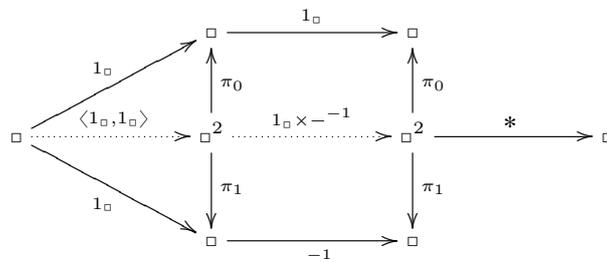
ここで， \square を変数記号の集合として取り扱っているとして， $\mathbf{1} = \square^0$ を単元集合 $\{\bullet\}$ と考えており， $!(x) = \bullet$ と定義している．一般に， $z \xrightarrow{!} \mathbf{1}$ は z から終対象 $\mathbf{1}$ へ向かう唯一の辺である．先ほどと同様に，項 $e * x$ の本体は中央のパスであるから，中央のパスの動きに注視するとよい．変数記号を除去して，背後にあるグラフ構造を明示化すると，以下を得る．



例 3.16 (項 $x * x^{-1}$ を描く). 群の言語 $\{e, *, -^{-1}\}$ を考える. ここで, $-^{-1}$ は 1 変数関数記号であるから, 辺 $\square \xrightarrow{-^{-1}} \square$ として扱われる. 項 $t(x) = x * x^{-1}$ の構成レシピは, 変数記号を用いれば以下のように書き下せる.



先ほどと同様に, 項 $e * x$ の本体は中央のパスであるから, 中央のパスの動きに注視するとよい. 変数記号を除去して, 背後にあるグラフ構造を明示化すると, 以下を得る.



このようにして, 言語 \mathcal{L} の項は, 言語のグラフ $G_{\mathcal{L}}$ のパスとして表される. そして, 等式理論 T とは, 項の等式の集合であり, これは項の間の合同関係 \approx_T を誘導するものであった. 項とはグラフのパスに過ぎないから, 等式理論もまたパス上の合同関係 \approx_T に過ぎない. 以上をまとめると, われわれは等式理論を以下のようにしてグラフ理論の言葉で語る事ができる!

関数記号 = 多重有向グラフの辺, 項 = 多重有向グラフのパス,
等式理論 = パス上の合同関係.

そして, 多重有向グラフ $G_{\mathcal{L}}$ をパス上の合同関係 \approx_T で割った結果となる商グラフ $\text{Path}(G_{\mathcal{L}})/\approx_T$ が, 等式理論 T のグラフ表示, つまり T に対応するローヴェア理論である. 多重有向グラフのパス上の合同関係による商グラフ (定義 1.12) には, 「圏」という別称が与えられていたことを思い出そう. この言葉を用いれば, ローヴェア理論の概念を以下のように定義することができる.

定義 3.17. C を有限積を持つ圏であるとする. ある 1 つの頂点 $\square \in C$ の有限積としてすべての頂点 $x \in C$ を表すことができるとき, C をローヴェア理論 (Lawvere theory) と呼ぶ.

言い換えれば、頂点集合が $V_G = \{\square^n : n \in \mathbb{N}\}$ となっている グラフ (圏) がローヴェア理論である。こうして、等式理論の概念を簡明に表現することができた。それでは、ローヴェア理論の具体例をいくつか見ていくことにしよう。等式理論とは、パス上の合同関係であると述べたが、「パスの同値」は グラフ の理論においては「可換図式」として図示されるのが通常である。

例 3.18 (結合律). 結合律とは、 $(x * y) * z = x * (y * z)$ という等式公理であった。例 3.14 で項 $x * (y * z)$ の構成レシピを記したが、その中央のパスだけを抜き出すと、

$$(x, y, z) \xrightarrow{\langle \pi_0, \pi_{12} \rangle} (x, (y, z)) \xrightarrow{1_{\square} \times * } (x, y * z) \xrightarrow{*} x * (y * z)$$

となっていた。同様に、項 $x * (y * z)$ の構成レシピは以下のように記せる。

$$(x, y, z) \xrightarrow{\langle \pi_{01}, \pi_2 \rangle} ((x, y), z) \xrightarrow{* \times 1_{\square}} (x * y, z) \xrightarrow{*} (x * y) * z$$

結合律は、この 2 本のパスが等しい、ということが言いたいのである、つまりは次の図である。

$$\begin{array}{ccccccc} (x, y, z) & \xrightarrow{\langle \pi_0, \pi_{12} \rangle} & (x, (y, z)) & \xrightarrow{1_{\square} \times * } & (x, y * z) & \xrightarrow{*} & x * (y * z) \\ & \searrow \langle \pi_{01}, \pi_2 \rangle & & & & & \parallel \\ & & ((x, y), z) & \xrightarrow{* \times 1_{\square}} & (x * y, z) & \xrightarrow{*} & (x * y) * z \end{array}$$

等号 = の部分を潰してしまい、この背後にあるグラフ構造を抽出すると、以下の可換図式がローヴェア理論における結合律である。

$$\begin{array}{ccccc} \square^3 & \xrightarrow{\langle \pi_0, \pi_{12} \rangle} & \square \times \square^2 & \xrightarrow{1_{\square} \times * } & \square^2 \\ & \searrow \langle \pi_{01}, \pi_2 \rangle & & & \searrow * \\ & & \square^2 \times \square & \xrightarrow{* \times 1_{\square}} & \square^2 \xrightarrow{*} \square \end{array}$$

例 3.19 (単位元の存在). モノイドの言語 $\{*, e\}$ において、 e が単位元であるとは、 $e * x = x * e = x$ を満たすことである。例 3.15 における $e * x$ の構成レシピの中央のパスを抜き出すと、

$$x \xrightarrow{\langle !, 1_{\square} \rangle} (\bullet, x) \xrightarrow{e \times 1_{\square}} (e, x) \xrightarrow{*} e * x$$

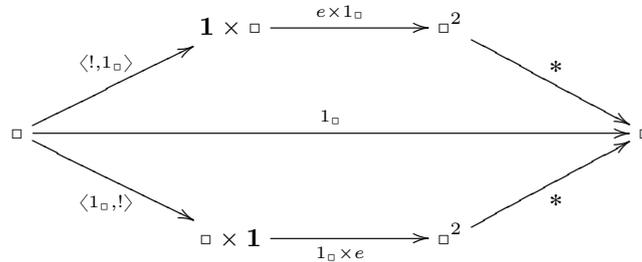
となっていた。同様に、項 $x * e$ の構成レシピは以下のように記せる。

$$x \xrightarrow{\langle 1_{\square}, ! \rangle} (x, \bullet) \xrightarrow{1_{\square} \times e} (x, e) \xrightarrow{*} x * e$$

単位元の公理は、この 2 本のパスが両方とも $x \mapsto x$ に等しい、ということが言いたいのである、つまりは次の図である。

$$\begin{array}{ccccccc} x & \xrightarrow{\langle !, 1_{\square} \rangle} & (\bullet, x) & \xrightarrow{e \times 1_{\square}} & (e, x) & \xrightarrow{*} & e * x \\ & \searrow \langle 1_{\square}, ! \rangle & & & & & \parallel \\ & & (x, \bullet) & \xrightarrow{1_{\square} \times e} & (x, e) & \xrightarrow{*} & x * e \end{array}$$

等号 = の部分を潰してしまい、この背後にあるグラフ構造を抽出すると、以下の可換図式がローヴェア理論における単位元の公理である。



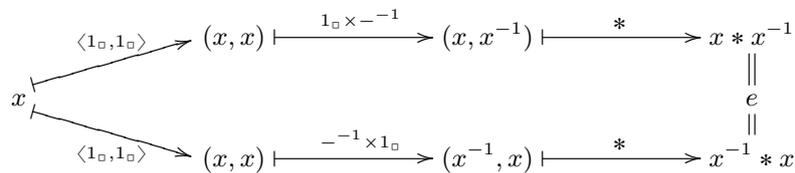
例 3.20 (逆元の存在). 群の言語 $\{*, e, -^{-1}\}$ において、 x^{-1} が x の逆元であるとは、 $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ を満たすことである。例 3.16 における $x * x^{-1}$ の構成レシピの中央の辺を抜き出すと、

$$x \xrightarrow{\langle 1_□, 1_□ \rangle} (x, x) \xrightarrow{1_□ \times -^{-1}} (x, x^{-1}) \xrightarrow{*} x * x^{-1}$$

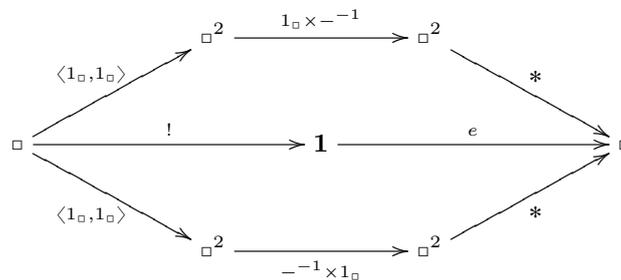
となっていた。同様にして、項 $x^{-1} * x$ の構成レシピは以下のように記せる。

$$x \xrightarrow{\langle 1_□, 1_□ \rangle} (x, x) \xrightarrow{-^{-1} \times 1_□} (x^{-1}, x) \xrightarrow{*} x^{-1} * x$$

逆元の公理は、この 2 本のパスが両方とも e に等しい、ということが言いたいから、つまりは次の図である。



等号 = の部分を潰してしまい、この背後にあるグラフ構造を抽出すると、以下の可換図式がローヴェア理論における逆元の公理である。



演習問題 3.21. 分配則 $x * (y + z) = x * y + x * z$ を表す可換図式を記述せよ。

以上のようにして、結合律、単位元の公理、逆元の公理、といった等式公理を可換図式として表すことができた。つまり、たとえば、「モノイドの公理」というローヴェア理論は、言語 $\{*, e\}$ の多重有向グラフ $G_{*, e}$ のモノイドの公理というパス上の合同関係による商であったが、これはつま

り結合律という可換図式 (例 3.18) と単位元の公理という可換図式 (例 3.19) を満たす圏と考えることもできる。等式公理とは可換図式のことであり、とする考え方は、理論のモデルを考える段階になると、より有効になる。

定義 3.5 と 3.7 で学んだ言語の構造と等式理論のモデルの概念について思い出そう。このアイデアを抽象化することによって、ローヴェア理論に対するモデル概念を定義することができる。とはいえ、ローヴェア理論の定義自体が、論理的に考えれば、「理論」というよりは既に「項モデル (term model)」の概念として導入されているのに近い。つまり、実質的に等式理論の 1 つの最小モデルを考えている段階から始まる。等式理論から項モデルは作れるが、項モデルから元の等式理論を復元できないことには注意する。

さて、ローヴェア理論のモデルを定義する前に、与えられた言語の構造とは何であったかを再考しよう。まず、定義 3.5 によれば、言語 \mathcal{L} の構造 M とは、領域 U および各関数記号 $f \in \mathcal{L}$ に対する解釈 $f^M: U^n \rightarrow U$ の指定であった。

$$\square^n \xrightarrow{f} \square \quad \xrightarrow{M} \quad U^n \xrightarrow{f^M} U$$

つまり、言語のグラフ $G_{\mathcal{L}}$ の形状を Set の中に描いたものが、 \mathcal{L} -構造である。定義 3.7 でも述べたが、構造における項の解釈は、記号の解釈から自動的に定まる。たとえば、項 $f(s_1, \dots, s_k)$ の解釈をグラフ的に表せば、以下を意味する。

$$\begin{array}{ccc} \square^n & \xrightarrow{\langle s_1, \dots, s_k \rangle} \square^k & \xrightarrow{f} \square \\ & \searrow f(s_1, \dots, s_k) & \nearrow \end{array} \quad \xrightarrow{M} \quad \begin{array}{ccc} U^n & \xrightarrow{\langle s_1^M, \dots, s_k^M \rangle} U^k & \xrightarrow{f^M} U \\ & \searrow f(s_1, \dots, s_k)^M & \nearrow \end{array}$$

さて、構造 $M = (U, -^M)$ が与えられたとき、 $M_V(\square^n) = U^n$ かつ $M_E(t) = t^M$ という、頂点上の写像 M_V と边上の写像 M_E の対 (M_V, M_E) が得られることに注意しよう。上の議論を組み合わせると、 M が \mathcal{L} -構造であるということは、 $M = (M_V, M_E)$ が グラフ 準同型としての条件を満たすということであるとわかる。つまり、 \mathcal{L} -構造とは、 Set における $G_{\mathcal{L}}$ 型図だと考えて差し支えない。同様に、等式理論 T のモデルは、これに加えて、さらに T に属す等式公理を満たすものである。等式公理とは可換図式のことであったから、つまり、以下の性質を持つものである。

$$\begin{array}{ccc} \square^n & \begin{array}{c} \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{s} \end{array} & \square^k \\ & \xrightarrow{M} & \\ U^n & \begin{array}{c} \xrightarrow{t^M} \\ \xrightarrow{s^M} \end{array} & U^k \end{array}$$

ここで、上図は、左側の図式が可換ならば右側の図式も可換であると述べている。以上より、等式理論の形状 (ローヴェア理論) を Set の中に描いたものが、等式理論のモデルであると言える。言い換えれば、ローヴェア理論 L のモデルとは、 Set における L 型図である。とはいえ、等式理論の形状を描くためのキャンパスを Set に制限する理由はないので、任意の圏 C における L 型図としてもよさそうだ。ただし、ひとつ注意する点として、ローヴェア理論の頂点 \square に対応する C

の頂点を U として指定した場合には, n 項積 \square^n に対して当然 U^n を指定しなければならない. つまり, L 型図には, 有限積を保つことを要求される.

形式的には, C における L 型図とは, グラフ 準同型 (関手) $L \rightarrow C$ のことであつたと思ひ出す. 関手 $f: C \rightarrow D$ が有限積を保つとは, C の頂点の 2 項積 $v_0 \times v_1$ について,

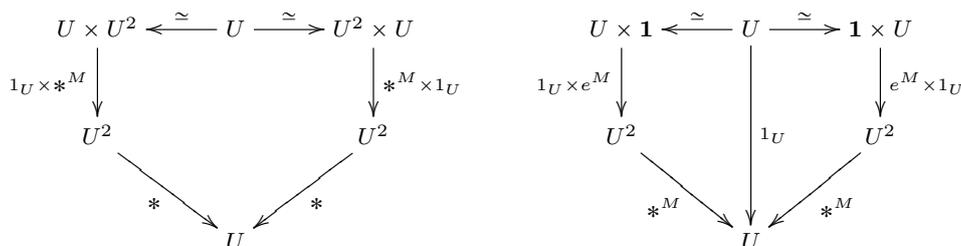
$$f(v_0 \times v_1) \simeq f(v_0) \times f(v_1)$$

であり, 射影 $\pi_i: v_0 \times v_1 \rightarrow v_i$ の行き先 $f(\pi_i): f(v_0 \times v_1) \rightarrow f(v_i)$ が射影となっていることを意味する.

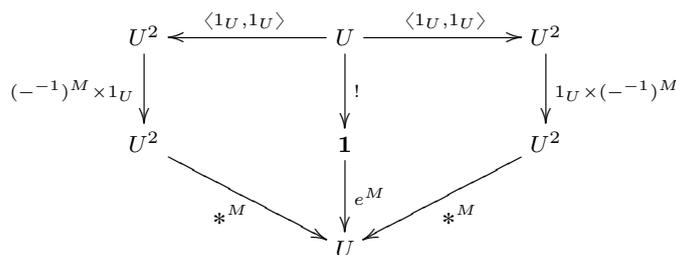
定義 3.22. C を有限積を持つ圏であるとする. このとき, C におけるローヴェア理論 L のモデル (model) とは, 有限積を保つ関手 $M: L \rightarrow C$ である.

議論をグラフの世界の話に持ち込んだことで, モデルの概念を図形的に理解することができた. つまり, いま, ローヴェア理論 L という圏, グラフ, あるいは “形状” が与えられている. この理論 L の形状のある圏における図示, すなわち “ L 型図” が, 理論 L のモデルである.

例 3.23 (モノイドと群). Set におけるモノイドの公理のモデルとは, モノイドの公理のローヴェア理論 L_{Mon} から Set への有限積を保つ関手 M である. ここで, モノイドの公理 L_{Mon} においては, 結合律および単位元の公理という可換図式 (例 3.18 および 3.19) があるから, モデル $M = (U, -^M)$ とはこれらの可換図式を保つものである. つまり, $M = (U, -^M)$ が L_{Mon} であるとは, 以下の可換図式を満たすものである.



ここで, 例 3.18 および 3.19 からは図式を少し回転させているので, 首を 90 度ほど傾けながら見てほしい. 群の公理のモデルの場合には, これにさらに逆元の公理の可換図式 (例 3.20) を満たすことが要求される. つまり, 以下の図式を可換にすることである.



例 3.24 (半オートマトン). 例 1.27 を思い出せば, 半オートマトン $\delta^*: \Sigma^* \times Q \rightarrow Q$ を定義する, という行為は, 自由モノイド Σ^* の一点 グラフ から Set への関手を定義することと同一であった. 言い換えれば, 自由モノイド Σ^* の一点 グラフ が, アルファベット Σ の半オートマトンのローヴェア理論 $L_{\text{auto}}(\Sigma)$ であり, 状態集合 $\alpha(\bullet) = Q$ と各 $a \in \Sigma^*$ に対する遷移関数 $\alpha(a) = \delta_a^*: Q \rightarrow Q$ の指定 $\alpha = (Q, \delta_a^*)_{a \in \Sigma^*}$ が理論 $L_{\text{auto}}(\Sigma)$ のモデルである.



ここで, 一点 グラフ の唯一の頂点 \bullet は終対象であり, $\bullet^n \simeq \bullet$ であるから, 一点 グラフ もまたローヴェア理論となることに注意する. 一般に, モノイド M に対する M -半オートマトン (モノイド作用) や群 G に対する G -作用もまた, 対応するローヴェア理論のモデルとして表すことができる.

念のため, \mathcal{L} -構造の概念 (定義 3.5) も, この言葉を用いた定義として書き下しておくことにしよう. 等式理論においては, モデルとは等式公理を満たす \mathcal{L} -構造であるから, \mathcal{L} -構造は「公理を持たない理論」のモデルとして表すことができる. これは, 多重有向グラフ $G_{\mathcal{L}}$ からの関手のことであると言いたいところであるが, $G_{\mathcal{L}}$ が グラフ であるとは限らないという点に注意する必要がある. したがって, グラフ の文脈における \mathcal{L} -構造とは, 言語 \mathcal{L} の多重有向グラフ $G_{\mathcal{L}}$ の生成する自由 グラフ $\text{Path}(G_{\mathcal{L}})$ のモデルである, と定義するのが正しい. つまり, 自由 グラフ $\text{Path}(G_{\mathcal{L}})$ が公理を一切持たない等式理論を表すものであり, これはローヴェア理論の特別な例でもある.

多ソート等式理論: 等式理論 (ローヴェア理論) の例としては, モノイド, 群, 環の公理などがあつた. これらの概念の特徴としては, 1 つの集合に対して何らかの構造が入っているというものである. しかし, 数学においては, 複数の集合が絡み合っているような構造を考えることがしばしばある.

たとえば, 例 1.26 で述べたように, 多重有向グラフは Set における $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図として表せる. したがって, 何かの理論のモデルであると考えられるが, ここで問題となるのは, 多重有向グラフの定義が 2 つの集合, つまり頂点集合 V と辺集合 E を指定していることである. また, 例 3.24 の半オートマトンの場合にも, アルファベット Σ が固定されていれば, 「アルファベット Σ の半オートマトンの理論」はローヴェア理論と考えられるのであるが, アルファベット Σ を動かす余地があるような「半オートマトン」はローヴェア理論ではない. つまり, アルファベット集合 Σ と状態集合 Q というように集合を 2 つ指定する必要がある. モノイド作用や群作用についても全く同様である.

その他の数学的な例としては, 体 K を固定した上での K -ベクトル空間 (K -vector space) であるとか, より一般に, 環 R を固定した上での R -加群 (R -module) などは, ローヴェア理論および

そのモデルとして取り扱える。しかし、たとえば、先ほどと同様にして、環 R にも選択の余地がある場合には、環 R とそれが作用する加群 M の 2 つの構造付き集合を指定する必要があり、ローヴェア理論とならなくなってしまう。

このように、複数の集合が絡み合っている構造は、数学にはありふれている。このような構造も、ローヴェア理論の拡張として取り扱いたいと考えるのは自然であろう。この問題を解消するのが、多ソート (multi-sorted) の理論である。

これまでに見た単ソートの理論では、関数記号は 1 つのソート \square の積 \square^n を始域とするものであった。多ソートの理論では、複数のソート X, Y, Z, \dots について語ることができる。ソート (sort) は、型 (type) と呼ばれることも多い。この場合、関数記号は単に $X^n \xrightarrow{f} Y$ や $Y^m \xrightarrow{g} W$ といったものだけではなく、

$$X^k \times Y^\ell \xrightarrow{h} V$$

のようなものもあり得る。これが、多ソート等式理論である。つまり、ソートたちの有限積もまた新たなソートである、という以上の要件は特にない。したがって、多ソート等式理論のグラフ表示は、以下のように簡潔に定義される。

定義 3.25. 多ソート・ローヴェア理論 (*multi-sorted Lawvere theory*) とは、有限積を持つ圏である。

ただし、圏のことばによる洗練された定義のまま具体例を考えるのはむずかしい。このため、有限積を持つ圏を考えるのではなく、それを生成する基本ソート X, Y, \dots およびそれらの有限積上の基本的な関数記号と等式公理 (パスの間の等式公理) という表示を与えることによって、多ソート・ローヴェア理論の具体例をいくつか与えよう。

例 3.26 (多重有向グラフ). 多重有向グラフの理論は、2 つの基本ソート V と E を持ち、2 つの辺 $\text{dom}, \text{cod}: E \rightarrow V$ を持つ多重有向グラフから生成される多ソート・ローヴェア理論である。ここで、「生成される」という言葉の意味は、 $V^k \times E^\ell$ なども頂点として含み、 $\text{dom} \times \text{cod}: E^2 \rightarrow V^2$ なども辺として含む、ということである。

例 3.27 (半オートマトン). 左モノイド作用の理論は、次から生成される多ソート・ローヴェア理論である。2 つの基本ソート M と Q を持ち、辺 $*$: $M^2 \rightarrow M$ および $e: 1 \rightarrow M$ は M に関するモノイドの公理を満たし、さらに辺 $a: M \times Q \rightarrow Q$ は左モノイド作用の公理を満たす。

多ソート等式理論においても、モデルの概念を考えることができる。単ソート等式理論においては、モデルとは、領域 $M(\square) = U$ と関数記号の解釈 f^M の対 $(U, -^M)$ によって決定されるものであった。多ソート等式理論においては、ソートが複数あるので、基本ソート X 毎に領域 $M(X)$ を定める必要がある。ただし、基本ソートの積に対応する領域は自動的に定まる。つまり、単ソートの場合と同様に、圏 C における多ソート・ローヴェア理論 L のモデルもまた有限積を保つ関手

$M: L \rightarrow C$ である .

例 3.28 (多重有向グラフ). L_{Graph} を例 3.26 で定義した多重有向グラフの多ソート・ローヴェア理論とする . このとき , 圏 Set における L_{Graph} のモデル , つまり有限積を保つ関手 $G: L_{\text{Graph}} \rightarrow \text{Set}$ について , $(G(V), G(E), G(\text{dom}), G(\text{cod}))$ が多重有向グラフとなる . ここで , 実際には , G の定義は , L_{graph} の表示である基本ソートとその上の基本的な辺に対する値の指定から自動的に決定される .

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dom}} \\ \xrightarrow{\text{cod}} \end{array} V \quad \xrightarrow{\sim} \quad E \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{dom}} \\ \xrightarrow{\text{cod}} \end{array} V$$

例 3.29 (半オートマトン). L_{MonAct} を例 3.27 で定義した左モノイド作用の多ソート・ローヴェア理論とする . このとき , 圏 Set における L_{MonAct} のモデル , つまり有限積を保つ関手 $\alpha: L_{\text{MonAct}} \rightarrow \text{Set}$ について , $M := (\alpha(M), \alpha(*), \alpha(e))$ はモノイドをなし , $\alpha(a): \alpha(M) \times \alpha(Q) \rightarrow \alpha(Q)$ は集合 $\alpha(Q)$ への M の左モノイド作用となっている .

群作用や加群についても , 同様の議論が行える . このような多ソートへの拡張によって , 数多くの数学的概念が グラフ のことばで書き表せることがわかった .

注意 . 圏が有限積を持つ必要がある理由は , 多変数関数記号を取り扱う必要があるためである . したがって , もし 1 変数関数記号しか取り扱わないのであれば , 圏は有限積を持つ必要はない . このような 1 変数関数記号しか持たない言語は , 単項 (*monadic*) と呼ばれる . したがって , 圏は , 多ソート単項言語における等式理論と同一視できる .

圏 = 多ソート単項等式理論

この考え方は , 論理学や計算機科学でしばしば用いられるようである . たとえば , 第 4 節でモナドという概念を取り扱うが , モッチ (Eugenio Moggi) がモナドを計算機科学に輸入した際には , 圏の概念が多ソート単項等式理論に他ならないことを利用して , モナドを取り扱うメタ言語を導入している . 論理学の分野では , また違う形で圏を理解する方法があり , それについては第 7 節以降で解説する .

3.3. 構造間の準同型と自然変換

つづいて , 構造間の準同型の定義を グラフ の言葉で書き直してみよう . 定義 3.12 によれば , 言語 \mathcal{L} の構造 M, N に対して , $h: M \rightarrow N$ が準同型であるとは , 任意の n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ と元 $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ に対して ,

$$h(f^M(a_1, \dots, a_n)) = f^N(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

を満たすことであった．この条件は，以下の図式を可換にすることと同値である．

$$\begin{array}{ccc} M^n & \xrightarrow{h \times \cdots \times h} & N^n \\ f^M \downarrow & & \downarrow f^N \\ M & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

ここで， $(h \times \cdots \times h)(x_1, \dots, x_n) = (h(x_1), \dots, h(x_n))$ として定義されている．同様にして，ローヴェア理論 L のモデルの間の準同型を定義できる．つまり，モデル $M, N: L \rightarrow C$ の間の準同型とは，辺 $M(\square) \xrightarrow{h} N(\square)$ であって，任意の辺 $\square^n \xrightarrow{t} \square$ に対して，以下の図式を可換にするものである．

$$\begin{array}{ccc} M(\square^n) \simeq M(\square)^n & \xrightarrow{h \times \cdots \times h} & N(\square^n) \simeq N(\square)^n \\ M(t) \downarrow & & \downarrow N(t) \\ M(\square) & \xrightarrow{h} & N(\square) \end{array}$$

後の議論を明確にするために，モデル間の準同型の同値な別定義も紹介しておこう．ローヴェア理論 L における辺とは項のことであった．ただし，直積に対する射影 $\pi_i: \square^n \rightarrow \square$ もまた L の辺であることに注意する．これを利用すると，モデル $M, N: L \rightarrow C$ の間の準同型を以下のように定義できる．

定義 3.30. ローヴェア理論 L のモデル $M, N: L \rightarrow C$ が与えられているとする．このとき， M から N への準同型 (*homomorphism*) とは， C の辺の族 $(M(\square^n) \xrightarrow{h_n} N(\square^n))_{n \in \mathbb{N}}$ であって， L の任意の辺 $\square^k \xrightarrow{t} \square^\ell$ について，以下の図式を可換にするものである．

$$\begin{array}{ccc} M(\square^k) & \xrightarrow{h_k} & N(\square^k) \\ M(t) \downarrow & & \downarrow N(t) \\ M(\square^\ell) & \xrightarrow{h_\ell} & N(\square^\ell) \end{array}$$

上の定義において，射影 $\pi_i: \square^n \rightarrow \square$ を利用すると，辺 h_n は辺 h_1 を指定すれば自動的に定まることがわかる．たとえば， h_2 について見てみよう．準同型の定義の図式を L の辺 $\pi_0, \pi_1: \square^2 \rightarrow \square$ について適用すると，以下を得る．

$$\begin{array}{ccccc} & & M(\square^2) & & \\ & h_1 \circ M(\pi_0) \swarrow & \vdots h_2 & \searrow h_1 \circ M(\pi_1) & \\ N(\square) & \xleftarrow{N(\pi_0)} & N(\square^2) & \xrightarrow{N(\pi_1)} & N(\square) \end{array}$$

つまり，モデル N が直積を保つことから， $N(\square^2) \simeq N(\square)^2$ であり，上図の中央の辺は一意に定まる．具体的には， $h_2 = (h_1 \circ M(\pi_0)) \times (h_1 \circ M(\pi_1))$ である．よって，モデル間の準同型に関する

る 2 つの定義は同値である．しかし，以下の議論においては，後者の定義の方が見通しが良いので，後者をモデル間の準同型の形式的な定義として採用しよう．

多ソート言語 \mathcal{L} の場合，構造はソート X 毎に領域 $M(X)$ を持っていた．このため，構造間の準同型もまたソート毎に定義される．いま， $V_{\mathcal{L}}$ を \mathcal{L} のソート全体の族とする．このとき， \mathcal{L} -構造の間の準同型とは，関数の族

$$(\theta_X: M(X) \rightarrow N(X))_{X \in V_{\mathcal{L}}}$$

であり，どんな \mathcal{L} の関数記号 $f: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ に対しても，以下の等式を満たすものである．

$$\theta_Y(f^M(a_1, \dots, a_n)) = f^N(\theta_{X_1}(a_1), \dots, \theta_{X_n}(a_n)).$$

ただし，これも射影を利用することによって，先程と同様の理屈で，少し単純化することができる．具体的には，多ソート等式理論のグラフ表示，つまり多ソート・ローヴェア理論 L が与えられているとする．このとき， L のモデル $M, N: L \rightarrow C$ の間の準同型 (*homomorphism*) とは，関数の族 $(\theta_X: M(X) \rightarrow N(X))_{X \in V_L}$ であり， L の任意の辺 $X \xrightarrow{t} Y$ に対して，以下の図式を可換にするものである．

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \xrightarrow{h_X} & N(X) \\ M(t) \downarrow & & \downarrow N(t) \\ M(Y) & \xrightarrow{h_Y} & N(Y) \end{array}$$

これが多ソート・ローヴェア理論のモデル間の準同型の定義である．さて，多ソート・ローヴェア理論とは，あくまで有限積を持つ圏にすぎない．したがって，かなり多くの圏を（多ソート・ローヴェア）理論と考えることができる．同様にして，多くの関手は何らかの理論のモデルとして取り扱うことが可能である．このことから，モデル間の準同型の定義をそのまま関手の間の準同型の定義として採用するのは妥当であると思われる．関手の間の準同型は，通常，自然変換という名で呼ばれ，形式的には，以下のように定義される．

定義 3.31. 圏 C, D 間の関手 $f: C \rightarrow D$ から $g: C \rightarrow D$ への自然変換 (*natural transformation*) とは，圏 D の辺の族 $\theta = (\theta_x: f(x) \rightarrow g(x))_{x \in V_C}$ で次の条件を満たすもののことである．圏 C の任意の辺 $a: x \rightarrow y$ に対して，以下の図式を可換にする．

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\theta_x} & g(x) \\ f(a) \downarrow & & \downarrow g(a) \\ f(y) & \xrightarrow{\theta_y} & g(y) \end{array}$$

このとき，しばしば $\theta: f \Rightarrow g$ と書く．圏 C のすべての頂点 $x \in V_C$ について D の辺 θ_x が可逆であるときには， θ を関手 $f: C \rightarrow D$ と $g: C \rightarrow D$ の間の自然同型 (*natural isomorphism*) と呼び， $\theta: f \simeq g$ と書く．

ちなみに、自然同型の概念は、構造あるいはモデルの文脈では、構造、モデルの同型性を意味する。ここまでの話をまとめておくと、数理論理学あるいは普遍代数における基本的な概念は、グラフ（圏）の言葉を用いれば、以下のように対応付けられる。

等式理論（ローヴェア理論） \approx 圏 = 多重有向グラフのパス上の合同関係による商 グラフ
 モデル、構造 \approx 関手、 モデル、構造間の準同型 \approx 自然変換。

例 3.32. まずは最も簡単な例として、半順序のハッセ図を考えよう。いま、2つの半順序 P, Q のハッセ図の間のグラフ準同型 $f, g: P \rightarrow Q$ を取る。ここで、ハッセ図の間のグラフ準同型とは単調写像のことであった。それでは、準同型 f から g への自然変換とは何だろうか。半順序のハッセ図の場合には、あらゆる辺 e は順序 \leq を意味するが、そうすると自然変換の定義の図式には、 $f(x) \leq_Q g(x)$ および $f(y) \leq_Q g(y)$ という情報しか残らない。まとめると、

$$f \text{ から } g \text{ への自然変換が存在する} \iff (\forall x \in P) f(x) \leq_Q g(x).$$

特に、前順序のハッセ図上の準同型 f と g が自然同型であるとは、任意の $x \in P$ について $f(x) \equiv_Q g(x)$ であることを意味する。半順序の場合は、これは $f = g$ であることに他ならない。

例 3.33. 集合と関数のグラフ \mathbf{Set} における $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図式とは、多重有向グラフのことだったことを思い出そう。つまり、 $P = \bullet \rightrightarrows \bullet$ とすれば、多重有向グラフとは、グラフ 準同型 $G: P \rightarrow \mathbf{Set}$ のことであった。さて、多重有向グラフ $G, H: P \rightarrow \mathbf{Set}$ が与えられたとき、 G から H への自然変換とは、以下の図式を可換とする \mathbf{Set} における辺 θ_V と θ_E の対である。

$$\begin{array}{ccc} E_G & \xrightarrow{\theta_E} & E_H \\ \text{dom} \downarrow & & \downarrow \text{dom} \\ V_G & \xrightarrow{\theta_V} & V_H \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E_G & \xrightarrow{\theta_E} & E_H \\ \text{cod} \downarrow & & \downarrow \text{cod} \\ V_G & \xrightarrow{\theta_V} & V_H \end{array}$$

つまり、 G の辺 e に対して、

$$\text{dom}(\theta_E(e)) = \eta_V(\text{dom}(e)), \quad \text{かつ} \quad \text{cod}(\theta_E(e)) = \eta_V(\text{cod}(e))$$

を満たすもののことであるが、これは多重有向グラフの準同型の定義である。

例 3.34. モノイド M が与えられたとき、それを一点 グラフ と同一視する。モノイド M から集合と関数の グラフ \mathbf{Set} への グラフ 準同型とは、ある集合 Q へのモノイド M の左作用（つまり M -半オートマトン）に他ならない、というのは先に見た通りである。さて、 M -半オートマトン $\alpha, \beta: M \rightarrow \mathbf{Set}$ が与えられたとき、 α から β への自然変換とは何であるかを考えると、 M の各辺、つまり $s \in M$ に対して、以下の図式

を可換にする Set における辺 $Q_\alpha \xrightarrow{\theta} Q_\beta$ である.

$$\begin{array}{ccc} Q_\alpha & \xrightarrow{\theta} & Q_\beta \\ \alpha(s) \downarrow & & \downarrow \beta(s) \\ Q_\alpha & \xrightarrow{\theta} & Q_\beta \end{array}$$

いま, モノイド作用の略記 $\alpha(s)(q) = s \cdot q$ および $\beta(s)q = s \cdot q$ を用いる. 上の図式が述べることは, α から β への自然変換とは,

$$(\forall q \in Q_\alpha)(\forall s \in M) \quad \theta(s \cdot q) = s \cdot \theta(q)$$

を満たす関数 $\theta: Q_\alpha \rightarrow Q_\beta$ である. 言い換えれば, オートマトン α の状態 q を別のオートマトン β の状態 $\theta(q)$ に対応させるが, α の状態 q から語 s を読み込んだ後の状態 $s \cdot q$ の対応先 $\theta(s \cdot q)$ と, β の状態 $\theta(q)$ から語 s を読み込んだ後の状態 $s \cdot \theta(q)$ が等しい, ということである. 実は, これは M -半オートマトン Q_α から Q_β への準同型の定義である.

演習問題 3.35. (体を固定した上で) ベクトル空間の公理は等式理論であるから, ローヴェア理論 L_{Vect} を与える. Set におけるローヴェア理論 L_{Vect} のモデル U, V について, U から V への自然変換は, ベクトル空間の間の線形写像を与えることを確かめよ.

定義 3.36. 2つの グラフ C と D が同型 (*isomorphic*) であるとは, グラフ 準同型 $f: C \rightarrow D$ と $g: D \rightarrow C$ が存在して, $g \circ f = \text{id}_C$ かつ $f \circ g = \text{id}_D$ となることを意味する.

2つの グラフ C と D が同値 (*equivalent*) であるとは, グラフ 準同型 $f: C \rightarrow D$ と $g: D \rightarrow C$ が存在して, さらに自然同型 $\eta: \text{id}_C \simeq g \circ f$ および $\varepsilon: f \circ g \simeq \text{id}_D$ が存在することを意味する.

上では グラフ と書いたが, つまり圏の同型性と同値性の定義である. あえて グラフ と書いた理由は, 同型性の定義が通常の数学における構造の同型性の定義と一致していることが明らかになるようにするためである. さて, 同型性概念の方が普通の定義だと思えるかもしれないが, 普通の数学で現れる巨大な圏を考えているときには, $g \circ f$ や $f \circ g$ をぴったりと恒等写像にするのは非常にむずかしい. このため, $g \circ f$ や $f \circ g$ は恒等写像とぴったり一致しなくとも大体同じであればよい, という風に条件を少し弱めたものが, 圏同値性の定義である. 実際, 圏を扱う場合には, 同型性概念よりも同値性概念を用いることが多い.

関手圏: 数学に現れる圏の基本的な例は, 特定の数学的構造たちを頂点集合とし, その間の準同型写像を辺とする, という形のものが多い. たとえば, 群を頂点とし群準同型を辺とする圏 Grp や, ベクトル空間を頂点とし線形写像を辺とする圏 Vect などである. この基本的なアイデアに倣って, ローヴェア理論 L が与えられたとき, 圏 C における L のモデルのなす圏 $\text{Mod}_C(L)$ を考えたいと思うのは自然であろう. もちろん, この圏の各頂点は L のモデルであり, 辺はモデル間の準同型である.

$$V = \text{“}C \text{ における } L \text{ のモデル全体”}; \quad E = \text{“モデル間の準同型全体”}.$$

そして, $\text{Mod}_C(L)$ の辺集合 E 上の垂モノイド演算 \circ は, モデル間の準同型の合成によって与

えるのが妥当であろう．単ソート・ローヴェア理論の場合はこれでよい． $C = \text{Set}$ であるときは，この圏を $\text{Mod}(L)$ と書く．

しかし，単ソートでは表せない数学的概念も多いから，多ソート理論のモデルの圏についても考察しよう．この場合，垂モノイド演算 \circ について注意が必要である．まず，多ソート言語 \mathcal{L} の構造 M, N 間の準同型 $\theta: M \rightarrow N$ とは，あくまで C の辺の族 $\theta = (\theta_x: M(X) \rightarrow N(X))_{x \in V_{\mathcal{L}}}$ である．このため，準同型の合成 $\theta' \circ \theta = ((\theta' \circ \theta)_x)_{x \in V_{\mathcal{L}}}$ とは何であるかを考える必要があるが，単に成分毎の辺結合 ($C = \text{Set}$ の場合は関数合成) としておくのが妥当であろう：

$$(\theta' \circ \theta)_x := M(X) \xrightarrow{\theta_x} N(X) \xrightarrow{\theta'_x} P(X)$$

このように定義された垂モノイド演算 \circ に対して，多ソート・ローヴェア理論 L のモデルのなす圏は $\text{Mod}_C(L) = (V, E, \circ)$ として定義される．

ローヴェア理論のモデルは，あくまで関手に過ぎない．したがって， $\text{Mod}_C(L)$ とは，圏 L から圏 C への関手のなす圏である，と言い換えてもよい．具体的に， $\text{Mod}_C(L)$ の定義を圏の言葉を使って言い直そう．圏 G と H を固定したとき， G から H への関手たちを頂点とする圏を考えることができる．この圏は， $[G, H]$ または H^G などのように書かれる．各頂点は関手 (モデル) であるから，辺は関手 (モデル) の間の準同型，つまり自然変換である．つまり，この圏 $[G, H]$ における辺 $f \xrightarrow{\theta} g$ は，準同型 f から g への自然変換 $\theta: f \Rightarrow g$ である．以上をまとめると，

$$\begin{aligned} V_{[G, H]} &= \{f: G \rightarrow H \mid f \text{ は関手}\} \\ E_{[G, H]} &= \{f \xrightarrow{\eta} g \mid \eta: f \Rightarrow g \text{ は自然変換}\}. \end{aligned}$$

一応，圏 $[G, H]$ の辺上の垂モノイド演算 \circ についても注意しておくことがある．つまり，自然変換 $f \xrightarrow{\alpha} g \xrightarrow{\beta} h$ があったとき， $\beta \circ \alpha$ がどう定義されるか，という点である．これは多ソート理論のときと同様であるが，具体的に書き下そう．自然変換を成分表示すると，これは H の辺の族 $\alpha = (\alpha_x)_{x \in V_G}$ および $\beta = (\beta_x)_{x \in V_G}$ であるから， H における辺の結合を用いて， $f(x) \xrightarrow{\alpha_x} g(x) \xrightarrow{\beta_x} h(x)$ を $\beta_x \circ \alpha_x$ として表すことができる．まとめると， $[G, H]$ の辺 α, β について，

$$\beta \circ \alpha = (\beta_x \circ \alpha_x)_{x \in V_G}$$

と定義され，これは自然変換 α と β の垂直合成 (*vertical composition*) と呼ばれる．このように定義された圏 $[G, H] = (V_{[G, H]}, E_{[G, H]}, \circ)$ は関手圏 (*functor category*) と呼ばれる．

3.4. 自由代数と自由関手

つづいて，等式理論における自由代数の概念を圏論的に書き直すことにする．この節の内容は，第 4.5 節までは用いないので，もし難しいと感じたら，一旦，飛ばしてしまっても構わない．

ローヴェア理論の自由代数：ローヴェア理論における自由代数の概念を定式化しよう．等式理論において，集合 A が生成する自由代数 (定義 3.10) とは， A の元を定数記号に新たに加えた上

での閉項モデルのことであった．ここでは，自由代数の定義を圏の言葉を使って書き直すを試みよう．

等式理論のグラフ表示，つまりローヴェア理論 L においては，項とは辺のことであったから，閉項モデルは辺の集合として言い表されそうである．ただし，定数記号の挿入も行われるため，これは n 変数項 $\square^n \xrightarrow{t} \square$ と n 個の定数記号 $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ の組 (t, \bar{a}) と形式的に表示される．気持ちとしては， (t, \bar{a}) は閉項 $t(\bar{a})$ を表すと考えてよい．項と定数記号の区別を明確にするために，以後 (t, \bar{a}) の代わりに，しばしば $(t; \bar{a})$ のように書く．

それでは，集合 A が与えられたとき， L の“自由”モデル $F_L(A)$ の形式的な定義を与えよう．ただし， L のモデルは関手である．ここでは， Set への関手 $F_L(A): L \rightarrow \text{Set}$ である．関手はグラフ準同型であるから，頂点上の写像と辺上の写像の対である．記法が繁雑になるのを防ぐために，固定されている L は省略し，頂点上の写像は $\langle A \rangle$ ，辺上の写像は $-^A$ と書くことにする．

- (頂点) 頂点 \square は，先程述べたように，集合 A の各元を定数記号に加えた閉項 $t(\bar{a}) = (t; \bar{a})$ 全体の集合に移される．

$$\langle A \rangle(\square) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (L(\square^n, \square) \times A^n).$$

ここで， $L(\square^n, \square)$ は L における \square^n から \square への辺全体の集合である (定義 1.20)．この“ \mathcal{L}_A -閉項”全体の集合 $\langle A \rangle(\square)$ を自由モデル $F_L(A)$ の台集合 (*underlying set*) と呼び，以下では，単に $\langle A \rangle$ と略記する．

- (頂点の積) 実際には， L は他の頂点 \square^k も持つが，これは \square の直積であるから，その行き先は明らかな方法で定義できる．明示的に書き下せば，

$$\langle A \rangle(\square^k) = \langle A \rangle^k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (L(\square^n, \square^k) \times A^n)$$

である．つまり，閉項の k 組 $(t_1(\bar{a}), t_2(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a}))$ 全体の集合を表していると考えてよい．

- (辺) 辺 $\square^k \xrightarrow{f} \square$ が与えられれば，閉項の k 組 $(t_1(\bar{a}), t_2(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a}))$ から新たな閉項 $f(t_1(\bar{a}), t_2(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a}))$ が作られる．この項の構成は，上で図示したように，項 $f \circ (t_1 \times \dots \times t_k)$ に定数の組 \bar{a} を代入したものと同一である．したがって， $F_L(A)$ は L の各辺 $\square^k \xrightarrow{f} \square$ を次のように動かす．

$$f^A: \langle A \rangle^k \rightarrow \langle A \rangle; \quad (t_1, \dots, t_k; \bar{a}) \mapsto (f \circ (t_1 \times \dots \times t_k); \bar{a})$$

一般の辺 $\square^k \xrightarrow{f} \square^\ell$ についても同様に定義される．

関手 $F_L(A)$ から，領域 $\langle A \rangle$ と解釈 $-^A$ の対，つまり構造 $(\langle A \rangle, -^A)$ の情報が得られる．実際には，この $F_L(A)$ が L のモデルであると主張するためには， $F_L(A): L \rightarrow \text{Set}$ が関手であることを確かめる必要があるが，これを確認することは容易である．これによって，自由モデル $F_L(A) \in \text{Mod}(L)$ が定義された．

自由関手: もう一段先に進み, ローヴェア理論の自由モデルの構成を関手 $F_L: \text{Set} \rightarrow \text{Mod}(L)$ とみなすことを考えよう. ただし, 関手 (グラフ 準同型) とは, 頂点上の写像と辺上の写像の対である. 上ではまだ Set の頂点 A にしか $F_L(A)$ は定義されていないから, Set の辺 $A \xrightarrow{j} B$ に対する辺 $F_L(j) = j^*: F_L(A) \rightarrow F_L(B)$ を定義しなければならない. これは Set の辺の族

$$j^* = (j_{\square^k}^*: F_L(A)(\square^k) \rightarrow F_L(B)(\square^k))_{k \in \mathbb{N}} = (j_{\square^k}^*: \langle A \rangle^k \rightarrow \langle B \rangle^k)_{k \in \mathbb{N}}$$

として定義する. つまり, 各 $j_k^* := j_{\square^k}^*$ は A の元を定数記号に持つ閉項の k 組を B の元を定数記号を持つ閉項の k 組に書き換える関数である. 具体的には, 単純に項への定数記号 $a \in A$ の代入を $j(a) \in B$ の代入に置き換えるものと定義しよう.

$$j_k^*: (t_1, \dots, t_k; a_1, \dots, a_n) \mapsto (t_1, \dots, t_k; j(a_1), \dots, j(a_n)).$$

いろいろとゴチャゴチャしてきたので, ここまでの議論をまとめる.

- 閉項からなる領域: 各集合 A について, 台集合 $F_L(A)(\square^k) = \langle A \rangle^k$ は, A の元を定数記号とする閉項の k 組全体である.
- 項の解釈: 各辺 $\square^k \xrightarrow{f} \square^\ell$ の解釈 $F_L(A)(f) = f^A$ は, 閉項の k 組 $t_1(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a})$ に ℓ 個の項 $f = (f_1, \dots, f_\ell)$ をそのまま適用した結果となる閉項である:

$$f_1(t_1(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a})), \dots, f_\ell(t_1(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a})).$$

- 定数記号の置換: 各 $A \xrightarrow{j} B$ について, $F_L(j)_{\square^k} = j_k^*$ は, 項 $t_1(\bar{a}), \dots, t_k(\bar{a})$ の各定数記号 $a_i \in A$ を別の定数記号 $j(a_i)$ に置換して $t_i(j(a_1), \dots, j(a_n))$, $1 \leq i \leq k$ を与える.

この $F_L: \text{Set} \rightarrow \text{Mod}(L)$ が関手であることを確認したい. その前に, まず $F_L(j)$ は $\text{Mod}(L)$ の辺でなければならないが, $\text{Mod}(L)$ は関手圏であったから, 辺は自然変換である. つまり, $F_L(j) = j^*$ は関手 $F_L(A): L \rightarrow \text{Set}$ から $F_L(B): L \rightarrow \text{Set}$ への自然変換であるはずだ. 記号が煩雑になるのを防ぐため, ローヴェア理論 L の辺 $\square^2 \xrightarrow{f} \square$ を例にとる. このとき, 以下の図式が可換になる.

$$\begin{array}{ccc} \langle A \rangle^2 & \xrightarrow{j_2^*} & \langle B \rangle^2 \\ f^A \downarrow & & \downarrow f^B \\ \langle A \rangle & \xrightarrow{j_1^*} & \langle B \rangle \end{array}$$

が可換になることは, 以下によって確かめられる.

$$\begin{array}{ccc} (t_1, t_2; a_1, \dots, a_n) & \xrightarrow{j_2^*} & (t_1, t_2; j(a_1), \dots, j(a_n)) \\ f^A \downarrow & & \downarrow f^B \\ (f \circ (t_1 \times t_2); a_1, \dots, a_n) & \xrightarrow{j_1^*} & (f \circ (t_1 \times t_2); j(a_1), \dots, j(a_n)) \end{array}$$

つまり、定数記号の $j: A \rightarrow B$ による置換を先にやっても、関数記号 $\square^2 \xrightarrow{f} \square$ の適用による項の構成ステップを先にやっても、どちらでもよい、ということである。一般の $\square^k \xrightarrow{f} \square^\ell$ についても同様のことが成立する。そういうわけで、Set の与えられた辺 $A \xrightarrow{j} B$ に対して、行き先 $F_L(j) = j^*: F_L(A) \Rightarrow F_L(B)$ がしっかりと $\text{Mod}(L)$ の辺になっていることが確かめられたわけである。

あとは、 $F_L: \text{Set} \rightarrow \text{Mod}(L)$ が関手であることを確かめればよい。与えられた $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{\ell} C$ について、 $F_L(\ell \circ j) = F_L(\ell) \circ F_L(j)$ を示す必要がある。ここで、 $\text{Mod}(L)$ は関手圏であるから、辺上の垂モノイド演算 \circ は垂直合成 $(\beta \circ \alpha)_x = \beta_x \circ \alpha_x$ によって与えられる。しかし、 $F_L(\ell \circ j)_{\square^k}$ は定数記号 $a \in A$ の $(\ell \circ j)(a) \in C$ への置換であったから、定数記号 $a \in A$ の $j(a) \in B$ への置換 $F_L(j)$ と定数記号 $b \in B$ の $\ell(b) \in C$ への置換 $F_L(\ell)$ を合成したものと一致する。よって、 $F_L: \text{Set} \rightarrow \text{Mod}(L)$ が関手であることが確かめられる。

忘却関手：何か構造の入っている集合が与えられているとき、その構造を忘れて台集合の部分だけを見る、という操作がしばしば行われる。これは、圏の文脈では忘却関手 (*forgetful functor*) と呼ばれる。ローヴェア理論 L においては、忘却関手 $U_L: \text{Mod}(L) \rightarrow \text{Set}$ は、以下のように定義される関手である。

- 頂点の行き先として、 L のモデル $M: L \rightarrow \text{Set}$ を台集合 $M(\square)$ に置き換える。つまり、 $U_L(M) = M(\square)$ である。
- 辺 $M \xrightarrow{h} N$ は成分 $M(\square) \xrightarrow{h_\square} N(\square)$ に置き換える。つまり、 $U_L(h) = h_\square$ である。

これが関手であることは、関手圏の辺上の垂モノイド演算 \circ が垂直合成であることから従う。つまり、 $M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{g} P$ ならば、特に $M(\square) \xrightarrow{h_\square} N(\square) \xrightarrow{g_\square} P(\square)$ である。

§ 4. モノイド、モノイダル、モナド

われわれの グラフ (圏) の理論の核となる概念のひとつは、モノイドである。しかし、既に見てきたように、圏の世界には様々なモノイドがある。たとえば、モノイドの公理はローヴェア理論 T_{Mon} として表すことができ、Set における T_{Mon} のモデルとは、通常の意味のモノイドであった。しかし、Set 以外の圏 C に L_{Mon} のモデルを作れば、本物のモノイドとは別物になり得るであろう。そのようなモデルは、圏 C におけるモノイドと呼ばれる (例 3.23 を参照)。このアイデアは、第 4.4 節において、さらなる別のモノイド概念に一般化される。

その一般化の特殊な例として、本節では、数学のみならず計算機科学においても頻出する、モナドと呼ばれる概念を導入する。モナドとは一言で述べるなら「自己関手圏におけるモノイド対象」であり、つまり、とりあえずモノイドっぽいものである。通常モノイドが Set という圏におけるモノイドならば、モナドはまた別の圏におけるモノイドである。しかし、ローヴェア理論におけるモノイドとは少し異なるものであり、また別の角度からアプローチする必要がある。

天下一りに定義を与えてもよいが、本稿では、漠然とした概念に対して、適切な数学的定義に人

が辿り着くまでの過程を、一歩一歩着実にシミュレートしていくことにしてみよう。

4.1. クライスリ・トリプル

現在、われわれは「ある文脈で語られる話を、より広い文脈における話に拡大したい」と考えているとしよう。形式的には、文脈を拡大する変換 T があるとする。また、文脈の拡大と言っているのであるから、元の文脈での話を拡大した文脈で語る事ができる。つまり、

元の文脈の話を拡大した文脈に翻訳する η

が付随する。具体的には、たとえば、「点」に関する話を「空間」の話に拡大した場合には、もとの「点」に関する言及は「一点空間」として翻訳すればよい。あるいは「文字」に関する話を「文字列」の話に拡大した場合には、もとの「文字」に関する言及は「長さ 1 の文字列」として翻訳する。

例 4.1 (べき集合). 集合 X の部分集合全体を $\mathcal{P}(X)$ と書き。これはべき集合 (*powerset*) と呼ばれる。このとき、 $T = \mathcal{P}$ かつ $\eta = \{-\}$ としよう。つまり、集合 X および元 $x \in X$ について、

$$T(X) = \mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}, \quad \eta(x) = \{x\}$$

と定義する。 \mathcal{P} は「元」の話を「集合」の話に拡大し、 η は「元」を「一点集合」に翻訳する

例 4.2 (文字列). 集合 Σ 上の有限文字列全体を Σ^* と書いていたことを思い出そう。文字と文字列の違いを明確にするために、 Σ 上の文字列は、 $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ と表すことにする。このとき、 $T = -^*$ かつ $\eta = \langle - \rangle$ としよう。つまり、集合 Σ および元 $a \in \Sigma$ について、

$$T(\Sigma) = \Sigma^*, \quad \eta(a) = \langle a \rangle$$

と定義する。 T は「文字」の話を「文字列」の話に拡大し、 η は「文字」を「長さ 1 の文字列」に翻訳する

集合/対象/頂点のレベルでの文脈が拡大されたならば、関数/射/辺のレベルの文脈も同時に拡大されるべきである。たとえば「元」の文脈を「集合」の文脈に拡大すれば、「一価関数」の文脈の話が「多価関数」の文脈に拡大されるであろうし、また別の文脈の拡大では、「決定的計算」の文脈の話が「非決定的計算」の文脈の話に拡大されたりする。形式的には、文脈の変換 T は圏 C の頂点上の写像 $T: V_C \rightarrow V_C$ であるとして、一般に、次の概念を考える。

定義 4.3. 圏 C 上の頂点上の写像 $T: V_C \rightarrow V_C$ が与えられているとする。このとき、頂点 X から Y への T に対するクライスリ射 (*Kleisli morphism*) とは、 C の辺 $X \xrightarrow{k} T(Y)$ である。

例 4.4 (べき集合トリプル). \mathcal{P} に対するクライスリ射、つまり関数 $g: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ はしばしば X から Y への多価関数 (*multi-valued function*) と呼ばれる。一価関数 f の話は、値 $f(x)$ を一点集

合 $\{f(x)\}$ に翻訳することによって、多価関数であると思うことができる。つまり、集合 X, Y 上の一価関数 $f: X \rightarrow Y$ は、以下のように多価関数の話に次のように持ち上げることができる。

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\{-\}} \mathcal{P}(Y) \qquad x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{\{-\}} \{f(x)\}$$

しかし、多価関数の場合には、出力値しか文脈の拡大がなされていない。出力値の文脈が拡大されているとき、入力値の文脈の拡大も考えるのは自然である。これについては、多価関数 $g: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ が与えられているとき、 $g^\cup: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ を

$$g^\cup(S) = \bigcup_{x \in S} g(x)$$

によって定義する。このとき、 $(\mathcal{P}, -^\cup, \{-\})$ をべき集合トリプルと呼ぶことにする。

例 4.5 (自由モノイド・トリプル). $-^*$ に対するクライスリ射、つまり文字列値関数 $p: X \rightarrow Y^*$ を考える。通常関数 $f: X \rightarrow Y$ の話は、値 $f(x)$ を長さ 1 の文字列 $\langle f(x) \rangle$ に翻訳することによって、文字列値関数と思うことができる。

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\langle - \rangle} Y^* \qquad x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{\langle - \rangle} \langle f(x) \rangle$$

これも出力値の文脈の拡大しかなされていないため、入力値の文脈も拡大したい。これについては、文字列値関数 $p: X \rightarrow Y^*$ が与えられているとき、 $p^{[*]}: X^* \rightarrow Y^*$ を

$$p(\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle) = p(x_0) * p(x_1) * \dots * p(x_n)$$

で定義する。ここで、 $*$ は文字列結合演算である。このとき、 $(T, -^{[*]}, \langle - \rangle)$ を自由モノイド・トリプルと呼ぶことにする。

このように、文脈を拡大する操作 T 、元の文脈の拡大後の文脈への翻訳 η および (クライスリ射に対する) 入力値の文脈の拡大 $-^+$ のトリプル $(T, -^+, \eta)$ が与えられているとしよう。クライスリ射の定義そのままでは合成の概念が不明瞭であるが、入力側の文脈の拡大 $-^+$ を利用することによって、クライスリ射の合成が可能になる。具体的には、クライスリ射 $f: X \rightarrow T(Y)$ と $g: Y \rightarrow T(Z)$ のクライスリ合成 $g \diamond f$ は以下のように定義できる。

$$X \xrightarrow{g \diamond f} T(Z) \quad := \quad X \xrightarrow{f} T(Y) \xrightarrow{g^+} T(Z).$$

トリプルの性質: さて、それではトリプル $(T, -^+, \eta)$ が満たすべき条件を考察していこう。まずは、 η の定義域を少し明確にする必要がある。べき集合トリプルの場合には、 $\{-\}: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ であったが、一般の場合においても、 X 毎に $\eta_x = \{-\}$ があると考えた方がよい。

また、トリプルが与えられたとき、射の文脈では、 η が出力値の拡大後の文脈への翻訳 $f \mapsto f^\eta = \eta_X \circ f$ を与え、 $-^+$ が入力値の拡大後の文脈への翻訳の役割を担うと考えてよい。

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \rightsquigarrow \quad X \xrightarrow{f^\eta} T(Y) \quad \rightsquigarrow \quad T(X) \xrightarrow{(f^\eta)^+} T(Y)$$

このとき、 $T(f) = (f^\eta)^+$ とすることによって、任意の $X \xrightarrow{f} Y$ に対して $T(X) \xrightarrow{T(f)} T(Y)$ が定義される。つまり、 T は頂点だけでなく辺も動かす変換であると考えることができる。

(K1) トリプルの持つ 1 つめの条件は、当然ながら「 p^+ は p の拡張である」というものである。たとえば、べき集合トリプルや自由モノイド・トリプルならば、

$$p^\cup(\{x\}) = p(x), \quad p^{[*]}(\langle x \rangle) = p(x)$$

である。一般に、包含写像 $\iota: X \hookrightarrow Z$ が与えられたとき、関数 $g: Z \rightarrow Y$ が関数 $f: X \rightarrow Y$ の拡張である、ということは、 $g(\iota(x)) = f(x)$ であることを意味する。トリプルの場合は、 $\eta_X: X \rightarrow T(X)$ を X の $T(X)$ への包含写像のようなものであると考える、関数の拡張の定義をそのまま借用する。つまり、 p^+ が p の拡張であるとは、 $p^+ \circ \eta_X = p$ を意味する。

(K2) トリプルの持つ 2 つめの条件としては、「恒等写像は恒等写像に翻訳される」である。

$$X \xrightarrow{1_X} X \rightsquigarrow X \xrightarrow{1_X^\eta} T(X) \rightsquigarrow T(X) \xrightarrow{(1_X^\eta)^+} T(X) = T(X) \xrightarrow{1_{T(X)}} T(X)$$

この性質は、 $T(1_X) = 1_{T(X)}$ あるいは $\eta_X^+ = 1_{T(X)}$ と書き表せる。

(K3) 最後の性質は、「文脈の拡大と射の合成は順序交換可能」である。つまり、クライスリ射 $f: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ と $g: Y \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ が与えられているとして、次の性質を満たす。

$$(g \circ f)^+ = g^+ \circ f^+$$

クライスリ合成の定義に戻れば、これは $(g^+ \circ f)^+ = g^+ \circ f^+$ と書き直せる。

以上の条件「(K1) p^+ は p の拡張である」「(K2) 恒等写像は恒等写像に翻訳される」「(K3) 文脈の拡大と射の合成は順序交換可能」を満たすトリプルをクライスリ・トリプルと呼ぶ。

定義 4.6. 圏 $C = (V_C, E_C)$ 上のクライスリ・トリプル (Kleisli triple) とは、頂点上の写像 T 、辺の族 η および $-^+$ の 3 つ組 $(T, -^+, \eta)$ であり、以下の条件を満たすものである。

1. T は、 C の頂点上の写像 $T: V_C \rightarrow V_C$ である。
2. η は、 C の各頂点 $X \in V_C$ に対して、辺 $X \xrightarrow{\eta_X} T(X) \in E_C$ を割り当てる。
3. $-^+$ は、 C の各クライスリ射 $X \xrightarrow{p} T(Y) \in E_C$ に対して、辺 $T(X) \xrightarrow{p^+} T(Y) \in E_C$ を割り当てる。

これに加えて、さらに以下の条件を成立させる。

$$(K1) \quad p^+ \circ \eta_X = p, \quad (K2) \quad \eta_X^+ = 1_{T(X)}, \quad (K3) \quad q^+ \circ p^+ = (q^+ \circ p)^+.$$

例 4.7. 実際に、べき集合トリプルや自由モノイド・トリプルについて確認してみよう。性質 (K1) については自明である。性質 (K2) について確認してみると、

$$x \xrightarrow{1_X} x \rightsquigarrow x \xrightarrow{1_X^\eta} \{x\} \rightsquigarrow S \xrightarrow{(1_X^\eta)^\cup} \bigcup_{x \in S} \{x\} = S$$

$$x \xrightarrow{1_X} x \rightsquigarrow x \xrightarrow{1_X^\eta} \langle x \rangle \rightsquigarrow \sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \xrightarrow{(1_X^\eta)^{[*]}} \langle a_0 \rangle * \dots * \langle a_n \rangle = \sigma$$

となり，小さい文脈での恒等写像は広い文脈における恒等写像に翻訳されている．性質 (K3) は，確認が少し面倒である．べき集合トリプルの場合，

$$y \in p^\cup(S) \iff (\exists x) [x \in S \wedge y \in p(x)]$$

と書けることを利用すると，(K3) の左辺について，

$$\begin{aligned} z \in q^\cup p^\cup(S) &\iff (\exists y) [y \in p^\cup(S) \wedge z \in p(y)] \iff (\exists y) [(\exists x) [x \in S \wedge y \in p(x)] \wedge z \in p(y)] \\ &\iff (\exists x)(\exists y) [x \in S \wedge y \in p(x) \wedge z \in p(y)] \end{aligned}$$

となっている．(K3) の右辺については，

$$\begin{aligned} z \in (q^\cup \circ p)^\cup(S) &\iff (\exists x) [x \in S \wedge z \in q^\cup(p(y))] \iff (\exists x) [x \in S \wedge (\exists y) [y \in p(x) \wedge z \in q(y)]] \\ &\iff (\exists x)(\exists y) [x \in S \wedge y \in p(x) \wedge z \in q(y)] \end{aligned}$$

となる．したがって，べき集合トリプルはクライスリ・トリプルであることが示された．自由モノイド・トリプルが性質 (K3) を満たすことについては，読者の演習問題とする．

クライスリ・トリプルと切り離せない関係にあるものが，クライスリ射とクライスリ合成である．むしろクライスリ射の合成を扱うためにクライスリ・トリプルがあると言ってもよいかもしれない．このクライスリ合成を利用することによって， C の辺をすべてクライスリ射に置き換えても，ふたたび圏をなすことが分かる．

命題 4.8. (T, μ, η) を圏 $C = (V_C, E_C, \circ)$ 上のクライスリ・トリプルとする．辺集合 E_C^T を T のクライスリ射全体， \diamond をクライスリ合成とすると，3 つ組 $C_T = (V_C, E_C^T, \diamond)$ は再び圏をなす．

この圏 $C_T = (V_C, E_C^T, \diamond)$ は T のクライスリ圏 (*Kleisli category*) と呼ばれる．

演習問題 4.9. 命題 4.8 を証明せよ．

クライスリ・トリプルから得られる関手: $(T, \eta, -^+)$ が圏 C 上のクライスリ・トリプルであるとき， T はあくまで頂点上の写像であるが，さきほど見たように，

$$X \xrightarrow{f} Y \rightsquigarrow X \xrightarrow{\eta_Y \circ f} T(Y) \rightsquigarrow T(X) \xrightarrow{(\eta_Y \circ f)^+} T(Y)$$

を考えれば， $T(f) = (\eta_Y \circ f)^+$ とすることによって，任意の $X \xrightarrow{f} Y$ に対して $T(X) \xrightarrow{T(f)} T(Y)$ が定義される．こうして， T は頂点上と辺上の両方で定義された写像とすることができる．

例 4.10 (べき集合). べき集合トリプルについて考えると，関数 $f: X \rightarrow Y$ と集合 $S \subseteq X$ について，

$$\mathcal{P}(f)(S) = (\{-\} \circ f)^\cup(S) = \bigcup_{x \in S} (\{-\} \circ f)(x) = \bigcup_{x \in S} \{f(x)\} = \{f(x) : x \in S\}$$

であると分かる．つまり， $f: X \rightarrow Y$ に対して $\mathcal{P}(f): \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ は像 $S \mapsto f[S]$ によって定義される．

例 4.11 (自由モノイド). 自由モノイド・トリプルについて考えると, 関数 $f: X \rightarrow Y$ と文字列 $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \in X^*$ について,

$$f^*(\sigma) = (\langle - \rangle \circ f)^{[*]}(\sigma) = \langle f(a_0) \rangle * \dots * \langle f(a_n) \rangle = \langle f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$$

であると分かる. つまり, $f^*: A^* \rightarrow B^*$ は $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle \mapsto \langle f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$ と定義される.

命題 4.12. $(T, \eta, -^+)$ が圏 C 上のクライスリ・トリプルならば, 上のように拡張した T は必ず C 上の自己関手となる.

演習問題 4.13. 命題 4.12 を証明せよ.

4.2. モナドの定義

前節では, クライスリ・トリプルを文脈の拡大として導入した. クライスリ・トリプルの定義から導かれる性質として, 実は, 文脈の拡大 T は 1 度行えば十分であることがわかる. つまり, 文脈の拡大を複数回ネストしても 1 回拡大するのと同じことである. より正確には,

複数回の拡大後の話を 1 回の拡大における話に翻訳する演算 μ

が付随する. 具体的には, クライスリ・トリプル $(T, -^+, \eta)$ が与えられたとき, この μ は以下のようにして定義される.

$$\mu_X = 1_{T(X)}^+ : TT(X) \rightarrow T(X).$$

つまり, この μ は, 文脈の 2 回拡大後の話を 1 回拡大後の話に翻訳している. 結論として, 文脈の拡大 T は, いわゆる閉包作用素のような働きをする.

このようにして, クライスリ・トリプルから新たなデータ μ を得られたわけであるが, 実はこれを含めたデータ (T, μ, η) がいわゆるモナドと呼ばれるものである. 演算 $\mu: T \circ T \Rightarrow T$ がモノイド演算ならぬモナド演算であり, $\eta: 1 \Rightarrow T$ が単位元っぽいものであり, 3 つ組 (T, μ, η) がモナドである.

例 4.14 (べき集合モナド). 集合 A から始まり, べき集合 $\mathcal{P}(A)$, そのべき集合 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ というように, べき集合操作はどんどんネストしていくことができる.

$$A, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))), \dots$$

べき集合のネストを解きほぐす演算は, 集合和 \bigcup である. 具体的には, $S \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ を取ってくると, S は A の部分集合の族である. 分かりやすさのために S の元を添え字付ければ, $S = \{S_i : i \in I\}$ と書ける. ここで, S_i は A の部分集合, つまり $S_i \in \mathcal{P}(A)$ である. すると, 集合族 S に対する和 $\bigcup S$ の定義を思い出してもらえば, 以下を得る.

$$\bigcup S = \bigcup_{i \in I} S_i \in \mathcal{P}(A)$$

つまり、集合和を写像として見れば、 $\cup: \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ となっており、べき集合の二重ネストを一重ネストに解きほぐしていることがわかる。実際、これが上で導入した μ と同一になることは以下のようにして確認できる。

$$\mu_A(\mathcal{S}) = 1_{\mathcal{P}(A)}^{\cup}(\mathcal{S}) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} 1_{\mathcal{P}(A)}(S) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

集合算に慣れていない人のためにもう少し具体例を出せば、

$$\bigcup \left\{ \{a, b, c\}, \{b, \{d\}, \{c, e\}\}, \{a, d\} \right\} = \{a, b, c, b, \{d\}, \{c, e\}, a, d\} = \{a, b, c, \{d\}, \{c, e\}, d\}$$

という感じに、集合和演算は集合のネストを一段階だけ落としてくれる。この3つ組 $(\mathcal{P}, \cup, \{-\})$ はべき集合モナド (*powerset monad*) と呼ばれる。

例 4.15 (リスト・モナド). 集合 Σ 上の文字列全体の集合 Σ^* と書き、これは文字列結合を意味する2項演算 $*$ と空語 ε によってモノイド $(\Sigma^*, *, \varepsilon)$ をなしていたことを思い出そう。この Σ^* は集合でもあるので、モノイド構造は忘れて Σ^* 自体をアルファベットだと思えば、 Σ^* 上の文字列全体の集合 Σ^{**} 、その上の文字列全体の集合 Σ^{***} というように、

$$\begin{aligned} \Sigma &\rightarrow (\text{自由モノイド構成}) \rightarrow (\Sigma^*, *, \varepsilon) \rightarrow (\text{構造を忘却}) \rightarrow \Sigma^* \rightarrow \\ &\rightarrow (\text{自由モノイド構成}) \rightarrow (\Sigma^{**}, *, \varepsilon) \rightarrow (\text{構造を忘却}) \rightarrow \Sigma^{**} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

と、この構成はどんどんネストしていくことができる。文字と文字列の違いを明確にするために、 Σ 上の文字列は、 $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ と表すことにしよう。ここで $a_0, a_1, \dots, a_n \in \Sigma$ である。この自由モノイド-忘却構成 $\Sigma \mapsto \Sigma^*$ のネストを解きほぐそう。いま、 Σ^* 上の文字列 $\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \in \Sigma^{**}$ が与えられたとき、 Σ^* 上のモノイド演算 $*$ 、つまり文字列結合演算を用いて、

$$[*](\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle) := a_0 * a_1 * a_2 * \dots * a_n$$

と定義する。これは Σ 上の文字列になっているから、写像として見れば $[*]: \Sigma^{**} \rightarrow \Sigma^*$ である。つまり、二重ネストを一重ネストに解きほぐしている。単位元は、「文字」の話を「長さ1の文字列」として文字列の話に翻訳する関数 $a \mapsto \langle a \rangle$ である。この3つ組 $(-^*, [*], \langle - \rangle)$ もまた代表的なモナドの例で、リスト・モナド (*list monad*) あるいは自由モノイド・モナド (*free monoid monad*) と呼ばれる。

さて、これらの3つ組 (T, μ, η) の共有する性質を形式化したい。まず、命題 4.12 で見たように、 T は自己関手であると考えることができる。また、 μ や η の始域と終域を厳密に書き下せば、

$$\mu_X: T(T(X)) \rightarrow T(X) \quad \text{および} \quad \eta_X: X \rightarrow T(X)$$

という形になっている。つまり、実際には μ と η 単体ではなく、正確なことを言えば、辺の族 $(TT(X) \xrightarrow{\mu_X} T(X))_{X \in V}$ と $(X \xrightarrow{\eta_X} T(X))_{X \in V}$ が与えられている。ただし、上の例においては、 μ はそれぞれ $\cup, [*]$ であり、 η はそれぞれ $\{-\}, \langle - \rangle$ であったように、つまり μ_X と η_X の定義は

X にほとんど依存していないようだ．この性質は， μ と η が自然変換（定義 3.31）であることを示唆する．

以下，圏 $C = (V, E)$ が与えられたとき，頂点上の恒等写像 $1_V: V \rightarrow V$ と辺上の恒等写像 $1_E: E \rightarrow E$ の対を 1_C と書く．この $1_C = (1_V, 1_E)$ は明らかに C 上の自己関手 $1_C: C \rightarrow C$ となり，以後 1_C を恒等自己関手と呼ぶ．

命題 4.16. $(T, -^+, \eta)$ が圏 C 上のクライスリ・トリプルならば，

$$\mu_X = 1_{T(X)}^+: T \circ T(X) \rightarrow T(X) \quad \text{および} \quad \eta_X: X \rightarrow T(X)$$

は自然変換 $\mu: T \circ T \Rightarrow T$ および $\eta: 1_C \Rightarrow T$ を与える．

Proof. まず，圏 $C = (V_C, E_C)$ の辺の族 $(\eta_Z: Z \rightarrow T(Z))_{Z \in V_C}$ が自然変換であるとは，任意の $X \xrightarrow{f} Y$ について， $\eta_Y \circ f = T(f) \circ \eta_X$ を満たすことが定義であった．命題 4.12 において， $T(f) = (\eta_Y \circ f)^+$ と定義されていたから，クライスリ・トリプルの性質を用いれば，

$$T(f) \circ \eta_X = (\eta_Y \circ f)^+ \circ \eta_X \stackrel{(K1)}{=} \eta_Y \circ f$$

となる．一応，図式を書いておけば，

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & T(X) \\ f \downarrow & \searrow \eta_Y \circ f & \downarrow T(f) = (\eta_Y \circ f)^+ \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & T(Y) \end{array}$$

右上の三角形が，射 $\eta_Y \circ f$ の $(\eta_Y \circ f)^+$ への拡張を表す図式である．つづいて，辺の族 $(\mu_Z: TT(Z) \rightarrow T(Z))_{Z \in V_C}$ が自然変換であるとは，任意の $X \xrightarrow{f} Y$ について， $\mu_Y \circ TT(f) = T(f) \circ \mu_X$ を満たすことが定義であった．まず， $\mu_Z = 1_{T(Z)}^+$ であったことを思い出すと，クライスリ・トリプルの性質を用いれば，以下の等式を得る．

$$\begin{aligned} \mu_Y \circ TT(f) &= 1_{T(Y)}^+ \circ (\eta_{T(Y)} \circ T(f))^+ \stackrel{(K3)}{=} (1_{T(Y)}^+ \circ \eta_{T(Y)} \circ T(f))^+ \stackrel{(K1)}{=} (1_{T(Y)} \circ T(f))^+ = T(f)^+ . \\ T(f) \circ \mu_X &= (\eta_Y \circ f)^+ \circ 1_{T(X)}^+ \stackrel{(K3)}{=} ((\eta_Y \circ f)^+ \circ 1_{T(X)})^+ = (\eta_Y \circ f)^{++} = T(f)^+ . \end{aligned}$$

したがって， $\mu_Y \circ TT(f) = T(f) \circ \mu_X$ を得る．以上より， $(\eta_Z)_{Z \in V_C}$ と $(\mu_Z)_{Z \in V_C}$ がそれぞれ自然変換 $\eta: 1_C \Rightarrow T$ および $\mu: T \circ T \Rightarrow T$ であることが示された． \square

一応，自然変換に慣れるために，べき集合モナドや自由モノイド・モナドについて，上の証明から得られる情報を具体的に明示化しておく．

例 4.17 (べき集合モナド). $C = \text{Set}$ および $T = \mathcal{P}$ とし， $\mu = \bigcup$ と $\eta = \{-\}$ を考えよう．ここで，冪集合構成 $\mathcal{P}: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ を関手と考える．ただし，関手とはグラフ準同型であるから，頂点上の値と辺上の値が定義されなければならない．ここで，頂点 A に対して $\mathcal{P}(A)$ は A の冪集合，辺 $A \xrightarrow{f} B$ に対して

$\mathcal{P}(f): \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ は像 $S \mapsto f[S]$ によって定義されていたことを思い出そう．いま, A と $\mathcal{P}(A)$ は $\{-\}: a \mapsto \{a\}$ によって結ばれている．

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\{-\}} & \mathcal{P}(A) \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}(f)=f[-] \\ B & \xrightarrow{\{-\}} & \mathcal{P}(B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\{-\}} & \{a\} \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}(f)=f[-] \\ f(a) & \xrightarrow{\{-\}} & \{f(a)\} = f[\{a\}] \end{array}$$

これが述べていることは, $\{-\}$ が恒等準同型 $1_{\text{Set}}: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ から $\mathcal{P}: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ への自然変換になっているということである．

つづいて, \mathcal{P} が関手ならば $\mathcal{P} \circ \mathcal{P}: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ もまた関手となる．以下のようにして $\mathcal{P} \circ \mathcal{P}$ と \mathcal{P} は Set の辺 \cup によって結ばれている．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{P}(A) \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(f)) \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}(f)=f[-] \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{P}(B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \{S_i\}_{i \in I} & \xrightarrow{\cup} & \bigcup_{i \in I} S_i \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(f)) \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}(f)=f[-] \\ \{f[S_i]\}_{i \in I} & \xrightarrow{\cup} & \bigcup_{i \in I} f[S_i] = f[\bigcup_{i \in I} S_i] \end{array}$$

つまり, 和集合演算 \cup は, $\mathcal{P} \circ \mathcal{P}: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ から $\mathcal{P}: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ への自然変換である．一応注意しておく, より数学的に厳密には, 集合 A 毎に和集合演算 $\bigcup_A: \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ があると考えると, それが自然変換になっている．記号的には, $\cup: \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}$ および $\{-\}: 1_{\text{Set}} \Rightarrow \mathcal{P}$ と書くことができる．

例 4.18 (リスト・モノド). Set の頂点 A と辺 $A \xrightarrow{f} B$ について, $F(A)$ を A 上の文字列全体の集合 A^* とし, $F(f) = f^*: A^* \rightarrow B^*$ を $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle \mapsto \langle f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$ と定義すると, $F: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ が関手となっていた．まず, 恒等写像 1_{Set} と F は以下のようにして Set の辺 $\langle - \rangle: a \mapsto \langle a \rangle$ によって結ばれている:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\langle - \rangle} & A^* \\ f \downarrow & & \downarrow f^* \\ B & \xrightarrow{\langle - \rangle} & B^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\langle - \rangle} & \langle a \rangle \\ f \downarrow & & \downarrow f^* \\ f(a) & \xrightarrow{\langle - \rangle} & \langle f(a) \rangle \end{array}$$

また, $F \circ F: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ も関手になる．以下のようにして $F \circ F$ と F は Set の辺 $[*]$ によって結ばれている．

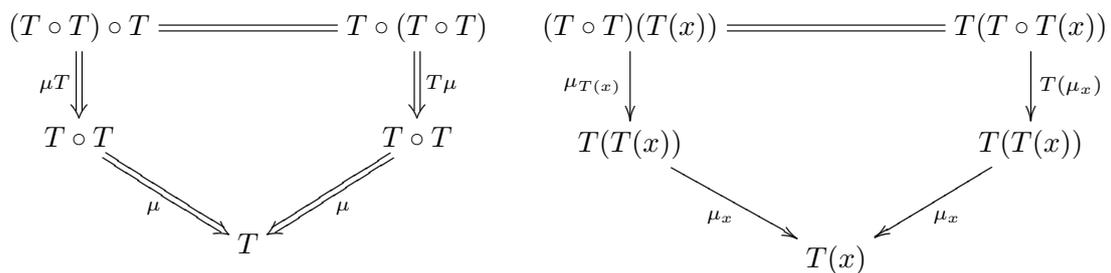
$$\begin{array}{ccc} A^{**} & \xrightarrow{[*]} & A^* \\ f^{**} \downarrow & & \downarrow f^* \\ B^{**} & \xrightarrow{[*]} & B^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \langle \sigma_0, \dots, \sigma_n \rangle & \xrightarrow{[*]} & \sigma_0 * \dots * \sigma_n \\ f^{**} \downarrow & & \downarrow f^* \\ \langle f^*(\sigma_0), \dots, f^*(\sigma_n) \rangle & \xrightarrow{[*]} & f^*(\sigma_0) * \dots * f^*(\sigma_n) \end{array}$$

以上より, $\langle - \rangle$ は 1_{Set} から F への自然変換であり, $[*]$ は $F \circ F$ から F への自然変換であることがわかった．記号的に書けば, $\langle - \rangle: 1_{\text{Set}} \Rightarrow F$ かつ $[*]: F \circ F \Rightarrow F$ である．

ところでモナドはモノイドっぽいものと述べたのであるから，何か結合律と単位律のようなものを満たすのだろうか．まず，注目する点としては，モナドを扱うに当たって，関数合成のネスト $T \circ T \circ T \circ \dots \circ T$ が自然に現れる．そして，関数合成 \circ は自動的にモノイド構造を持つ：

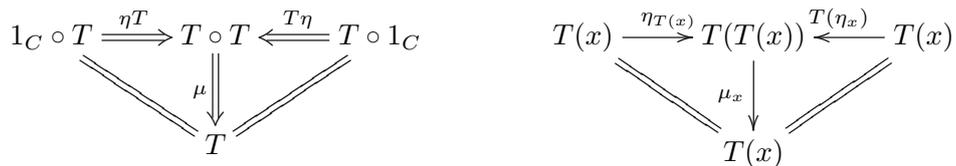
$$(T \circ T) \circ T = T \circ (T \circ T), \quad 1_C \circ T = T = T \circ 1_C$$

ここで 1_C は C 上の恒等自己関手である．まずは結合律 $(T \circ T) \circ T = T \circ (T \circ T)$ に注目しよう．問題となり得るのは，モナド演算 $\mu: T \circ T \Rightarrow T$ で左の括弧を先に潰すか右の括弧を先に潰すか，という点である．モナド演算の結合律が保証することは，モナド演算 μ で先に左 2 つを潰しても，先に右 2 つ潰しても同じ，ということである．



ここで，右図は左図を成分表示したものである．つまり，あくまで自然変換 μ とは辺の族 (μ_x) であるから， C の各頂点 x について右図が成立する，ということである．

次に，単位律 $1_C \circ T = T = T \circ 1_C$ に注目しよう．モナド単位 $\eta: 1_C \Rightarrow T$ を用いれば，この左右の 1_C を T に変換できる．モナドの単位律が保証することは， T が与えられたとき，それを $1_C \circ T$ とも $T \circ 1_C$ とも見ることができるが，そのどちらにもモナド単位 η を適用しても結果的に同じになる，ということである．



先ほどと同様に，右図は左図を成分表示したものである．以上について，余計な辺を取り除いて簡潔にまとめると，モナドの定義は以下によって与えられる．

定義 4.19. 圏 C 上のモナド (*monad*) とは C 上の自己関手 $T: C \rightarrow C$ と自然変換 $\mu: T \circ T \Rightarrow T$ および $\eta: 1_C \Rightarrow T$ の 3 つ組 (T, μ, η) であり， C の各頂点 x に対して，以下の図式を可換にするものである．

$$\begin{array}{ccc} T \circ T \circ T(x) & \xrightarrow{T(\mu_x)} & T \circ T(x) \\ \mu_{T(x)} \downarrow & & \downarrow \mu_x \\ T \circ T(x) & \xrightarrow{\mu_x} & T(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T(x) & \xrightarrow{\eta_{T(x)}} T \circ T(x) \xleftarrow{T(\eta_x)} & T(x) \\ & \searrow \mu_x \downarrow \swarrow & \\ & T(x) & \end{array}$$

とりあえず、これらの図式が結合律と単位律を表している、というのは説明した通りであるが、具体的にどういう操作を意味しているかを考えるには、具体例に触ってみるのがよい。たとえば、第 4.5 節において、等式理論（ローヴェア理論）の自由代数から必ずモナドを得られることを見るが、これは有限べき集合モナドや自由モノイド・モナドの概念を包含し、ここではモナド結合律やモナド単位律の働きが明示化されている（命題 4.30 の証明を見よ）。ここでは、以下の一般的な証明を与える。

定理 4.20. $(T, -^+, \eta)$ が圏 C 上のクライスリ・トリプルならば、 (T, μ, η) は圏 C 上のモナドである。

Proof. まず、 $X \xrightarrow{f} Y$ について $T(f) = (\eta_Y \circ f)^+$ であったことと $\mu_X = 1_{T(X)}^+$ であったことを思い出そう。モナド単位律の左三角形については、

$$\mu_X \circ \eta_{T(X)} = 1_{T(X)}^+ \circ \eta_{T(X)} \stackrel{(K1)}{=} 1_{T(X)}$$

であることから従う。モナド単位律の右三角形については、以下の等式を得る。

$$\mu_X \circ T(\eta_X) = 1_{T(X)}^+ \circ (\eta_{T(X)} \circ \eta_X)^+ \stackrel{(K3)}{=} (1_{T(X)}^+ \circ \eta_{T(X)} \circ \eta_X)^+ \stackrel{(K1)}{=} (1_{T(X)} \circ \eta_X)^+ = \eta_X^+ \stackrel{(K2)}{=} 1_{T(X)}.$$

モナド結合律については、 $\mu_X \circ T(\mu_X) = \mu_X \circ \mu_{T(X)}$ を示せばよい。左辺については、

$$\mu_X \circ T(\mu_X) = 1_{T(X)}^+ \circ (\eta_{T(X)} \circ \mu_X)^+ \stackrel{(K3)}{=} (1_{T(X)}^+ \circ \eta_{T(X)} \circ \mu_X)^+ \stackrel{(K1)}{=} (1_{T(X)} \circ \mu_X)^+ = \mu_X^+$$

であり、右辺については、

$$\mu_X \circ \mu_{T(X)} = 1_{T(X)}^+ \circ 1_{TT(X)}^+ \stackrel{(K3)}{=} (1_{T(X)}^+ \circ 1_{T(X)})^+ = 1_{T(X)}^{++} = \mu_X^+$$

となる。したがって、モナド結合律が成立することも示された。□

4.3. モナドとクライスリ・トリプルの同値性

モナドの定義は一見簡潔であると思うかもしれないが、実際に定義の詳細に入り込んでみると、その厄介さが分かる。具体的には、 (T, μ, η) がモナドであることを証明するためには、 T が自己関手であり、 μ, η が自然変換であり、さらにモナド結合律とモナド単位律を満たす、ということを示す必要があり、これはなかなか手間である。この手間を回避するために、クライスリ・トリプルが用いられることがある。

定理 4.20 において、クライスリ・トリプルからモナドを得られることを確認したが、逆にモナドからクライスリ・トリプルを得ることもできる。実際、定理 4.21 で示すように、モナドとクライスリ・トリプルは同一な概念であると言ってもよい。この同値性の数学的利点としては、モナドであることに比べると、クライスリ・トリプルであることを示すためには、証明しなければならない性質が少ないことが挙げられる。

モナドではなくクライスリ・トリプルを扱う恩恵はもうひとつある．1980年代末にモッチ (E. Moggi) は，計算機科学にモナドの概念を輸入したが，実際には，クライスリ・トリプルの方を用いたようである．クライスリ・トリプルの良い点の一つは，定義 4.6 を見ると分かるように，圏 C という言及以外には，圏論の概念（関手や自然変換など）を一切用いていないことである．したがって，圏論をほとんど知らない人でも，クライスリ・トリプルの定義の意味を理解できる．モッチは，さらに圏とは多ソート単項等式理論の概念と同一であること（第 3.2 節の最後を参照）に着目することによって，(モナドとクライスリ・トリプルの同値性を經由して) モナド概念から完全に圏論を取り除いた．このようにして，単なるモナドを取り扱うだけであれば圏論を避けることが可能であるが，ただし，計算機科学においてもモナドの様々な変種が多用されることには注意する．

それでは，モナドとクライスリ・トリプルが同一概念であることを示そう．既に見たように， $\mathcal{K} = (T, -^+, \eta)$ がクライスリ・トリプルならば， $\mu_X = 1_{T(X)}^+ : TT(X) \rightarrow T(X)$ とし，各 $X \xrightarrow{f} Y$ について $T(f) = (\eta_Y \circ p)^+$ と定義する．

$$T(X) \xrightarrow{T(f)} T(Y) := (X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\eta_Y} T(Y))^+.$$

このように T を頂点と辺上の写像に拡張することによって， $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} := (T, \mu, \eta)$ はモナドとなる，というのが定理 4.20 であった．

逆に，モナド $\mathcal{T} = (T, \mu, \eta)$ が与えられているとする．与えられたクライスリ射 $X \xrightarrow{p} T(Y)$ について， $p^+ = \mu_Y \circ T(p)$ と定義する．

$$T(X) \xrightarrow{p^+} T(Y) := T(X) \xrightarrow{T(p)} TT(Y) \xrightarrow{\mu_Y} T(Y).$$

このとき， $\mathcal{K}_{\mathcal{T}} := (T, -^+, \eta)$ がクライスリ・トリプルとなることを示そう．実際には，この構成が互いに逆になっていることも示す．

定理 4.21. 変換 $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ および $\mathcal{T} \mapsto \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ は以下の条件を満たす．

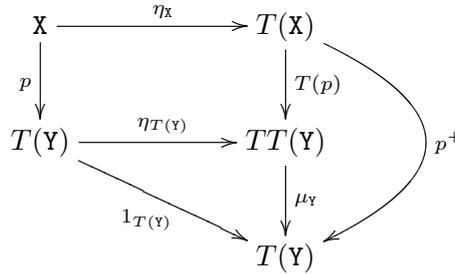
1. \mathcal{K} が圏 C 上のクライスリ・トリプルならば， $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ はモナドであり， $\mathcal{K}_{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} = \mathcal{K}$ である．
2. \mathcal{T} が圏 C 上のモナドならば， $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ はクライスリ・トリプルであり， $\mathcal{T}_{\mathcal{K}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{T}$ である．

Proof. (1) クライスリ・トリプル $\mathcal{K} = (T, -^+, \eta)$ に対して $\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = (T, \mu, \eta)$ がモナドであることは，定理 4.20 で既に証明した通りである．いま， $\mathcal{K}_{\mathcal{T}_{\mathcal{K}}} = (T, -^{\oplus}, \eta)$ を得たとしよう．ここで， $X \xrightarrow{p} T(Y)$ に対して， $p^{\oplus} = \mu_Y \circ T(p)$ である．このとき， $p^{\oplus} = p^+$ となることは，以下によって示される．

$$p^{\oplus} = \mu_Y \circ T(p) = 1_{T(Y)}^+ \circ (\eta_Y \circ p)^+ \stackrel{(K3)}{=} (1_{T(Y)}^+ \circ \eta_Y \circ p)^+ \stackrel{(K1)}{=} (1_{T(Y)} \circ p)^+ = p^+.$$

(2) モナド $\mathcal{T} = (T, \mu, \eta)$ に対して $\mathcal{K}_{\mathcal{T}} = (T, -^+, \eta)$ がクライスリ・トリプルとなることを示そう．まず (K1) については， $X \xrightarrow{p} T(Y)$ に対して， $p^+ \circ \eta_X = \mu_Y \circ T(p) \circ \eta_X$ であるから，以下の図

式より従う．



ここで，上の四角形は，自然変換 $\eta: 1_C \Rightarrow T$ の図式を辺 $X \xrightarrow{p} T(Y)$ に対して適用したものであり，下の三角形は，モナド単位律の図式である．性質 (K2) については，モナド単位律より，以下のように示せる．

$$\eta_X^+ = \mu_X \circ T(\eta_X) = 1_{T(X)}.$$

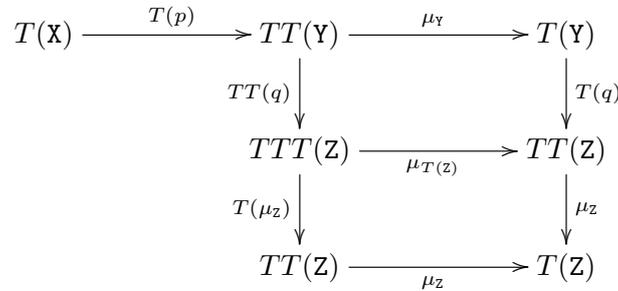
性質 (K3) について， $X \xrightarrow{p} T(Y)$ と $Y \xrightarrow{q} T(Z)$ が与えられているとき， $q^+ \circ p^+ = (q^+ \circ p)^+$ を示したい．クライスリ射の拡張 $-^+$ の定義に従って両辺を変形していくと，まず，左辺について，

$$q^+ \circ p^+ = \mu_Z \circ T(q) \circ \mu_Y \circ T(p)$$

である．右辺については， T が関手であることを利用すると，

$$\begin{aligned}
 (q^+ \circ p)^+ &= \mu_Z \circ T(q^+ \circ p) = \mu_Z \circ T(q^+) \circ T(p) = \mu_Z \circ T(\mu_Z \circ T(q)) \circ T(p) \\
 &= \mu_Z \circ T(\mu_Z) \circ TT(q) \circ T(p)
 \end{aligned}$$

を得る．この2つの結果の同値性は，以下の図式より従う．



ここで，上の四角形は，自然変換 $\mu: TT \Rightarrow T$ の図式を辺 $Y \xrightarrow{q} T(Z)$ に対して適用したものであり，下の四角形は，モナド結合律の図式である．

最後に，モナド $\mathcal{T} = (T, \mu, \eta)$ から $\mathcal{T}_{K_T} = (T', \mu', \eta)$ が得られたとする．このとき， $T' = T$ かつ $\mu' = \mu$ となることを示したい．まず， T が関手であることから，

$$\mu'_X = 1_{T(X)}^+ = \mu_X \circ T(1_{T(X)}) = \mu_X \circ 1_{TT(X)} = \mu_X$$

を得る．同様に， T が関手であることとモナド単位律 $\mu_Y \circ T(\eta_Y) = 1_{T(Y)}$ を用いれば，任意の $X \xrightarrow{f} Y$ に対して，

$$T'(f) = (\eta_Y \circ f)^+ = \mu_Y \circ T(\eta_Y \circ f) = \mu_Y \circ T(\eta_Y) \circ T(f) = 1_{T(Y)} \circ T(f) = T(f)$$

を得る．よって，目的の式が示された． □

上ではクライスリ・トリプルを元にクライスリ合成やクライスリ圏（命題 4.8）を定義していたが，モナドから直接，クライスリ合成やクライスリ圏を定義することもできる．具体的には，モナド (T, μ, η) が与えられたとき，クライスリ射 $f: X \rightarrow T(Y)$ と $g: Y \rightarrow T(Z)$ のクライスリ合成 $g \circ f$ は以下のように定義できる．

$$X \xrightarrow{g \circ f} T(Z) \quad := \quad X \xrightarrow{f} T(Y) \xrightarrow{T(g)} TT(Z) \xrightarrow{\mu_Z} T(Z).$$

これは，定理 4.21 を経由してモナドからクライスリ・トリプルを作った後に，以前の方法でクライスリ合成を定義したものと全く同一であると確認できる．したがって，クライスリ圏を扱う際に，クライスリ・トリプルを経由せずにモナドを直接考えてもよい．

4.4. モノイダル*

前節では，モナドの定義 4.19 をなんとなくモノイドっぽいものであると理解できる，ということについて説明した．実は，前節に説明したよりも，さらに厳密な意味で，モナドはモノイドの一種であると考えることができる．この第 4.4 節では，モナドがどのような意味でモノイドとみなせるかについて解説する．モナドとモノイドの関係について特に興味がない場合には，第 4.4 節を飛ばしても問題ない．

圏 $C = (V, E)$ とは，辺集合 E にモノイドっぽい構造の入った多重有向グラフであったが，一部のグラフはさらに頂点集合 V にもモノイドっぽい構造を持つ．たとえば， C が $\bullet\bullet$ 型の極限を持つ，つまり二項積 \times を持つならば，これは写像 $\times: V \times V \rightarrow V$ とみなせるので，つまり \times は頂点集合 V 上の 2 項演算とみなせる．さらに， C が \emptyset 型の極限を持つ，つまり終対象 $1 \in V$ を持つならば，これを 2 項演算 \times の単位元とみなせる．

命題 4.22. 圏 $C = (V, E, \circ, 1_\bullet)$ が終対象 $1 \in V$ と 2 項積 $\times: V \times V \rightarrow V$ をもつならば，任意の $x, y, z \in V$ に対して以下が成立する．

1. (結合律) $(x \times y) \times z \simeq x \times (y \times z)$.
2. (単位律) $1 \times x \simeq x \simeq x \times 1$.

ここで，記号 \simeq は，頂点間の同型性（定義 1.18）を意味する．

したがって，頂点集合 $(V, \times, 1)$ はモノイドのようなものとみなせる．同様にして，圏 C が $\bullet\bullet$ 型の余極限を持つ，つまり二項余積 $+: V \times V \rightarrow V$ を持ち，さらに \emptyset 型の余極限を持つ，つまり始対象 $0 \in V$ を持つならば， $+$ が結合律を満たし， 0 は $+$ の単位元となる．よって， $(V, +, 0)$ もまたモノイドのようなものとみなせる．

さて，積と余積は，単に頂点上のモノイド演算という以上の情報を持つ．たとえば， $\bullet\bullet$ 型図の錘 $x \xleftarrow{a} z \xrightarrow{b} y$ が与えられたとき，辺 $z \xrightarrow{\langle a, b \rangle} x \times y$ が一意に存在する，というのが $\bullet\bullet$ 型図の極限 $x \times y$ の定義であった．つまり，2 項積 \times は，頂点上の 2 項演算 $(x, y) \mapsto x \times y$ であると同時に

に，辺上の部分 2 項演算 $(a, b) \mapsto \langle a, b \rangle$ も与えている．ただし， a と b の始点が等しい場合にしか $\langle a, b \rangle$ は定義されていないが，第 3.2 節で導入した辺の積について思い出そう．始点が等しいとは限らない辺 $a: x \rightarrow y$ と $b: x' \rightarrow y'$ に対して， $a \times b: x \times x' \rightarrow y \times y'$ を $a \times b = \langle a \circ \pi_0, b \circ \pi_1 \rangle$ として定義する：

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xleftarrow{\pi_0} & x \times x' & \xrightarrow{\pi_1} & x' \\
 \downarrow a & & \downarrow a \times b & & \downarrow b \\
 y & \xleftarrow{\pi_0} & y \times y' & \xrightarrow{\pi_1} & y'
 \end{array}$$

こうして，2 項積 \times は，頂点上の 2 項演算であると同時に，辺上の 2 項演算 $\times: E \times E \rightarrow E$ と考えることができる．これは 2 項余積 $+$ についても同様である．言い換えれば， \times と $+$ は共にグラフ準同型あるいは関手 $C \times C \rightarrow C$ とみなせる．

このように，辺上のモノイドっぽい構造 $(E, \circ, 1_\bullet)$ だけでなく，頂点上にもモノイドっぽい構造 $(V, \otimes, 1)$ を持つ圏 $G = (V, E, \circ, 1_\bullet, \otimes, 1)$ を考えよう．上記に述べた性質をまとめたものが，モノイダルとよばれるものになるが，厳密な定義は少しややこしい．このため，ここでは少し簡単な，狭義モノイダル，というものを導入しよう．

定義 4.23. 圏 $C = (V, E, \circ, 1_\bullet)$ に関手 $\otimes: C \times C \rightarrow C$ と頂点 $1 \in C$ を加えた組 $(V, E, \circ, 1_\bullet, \otimes, 1)$ が次の条件を満たすとき，狭義モノイダル (*strict monoidal*) と呼ばれる：

1. (結合律) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.
2. (単位律) $1 \otimes x = x = x \otimes 1$.

ただし，狭義モノイダルの場合には，結合律と単位律に同型 \simeq ではなく等号 $=$ を要求する，という厳しい条件を課している．この条件を緩めて，やはり同型 \simeq でよい，としたものがモノイダルである．正確には，結合律と単位律に関する 3 つの自然同型

$$a: (- \otimes -) \otimes - \simeq - \otimes (- \times -), \quad \ell: 1 \otimes - \simeq -, \quad r: - \otimes 1 \simeq -$$

があり，これらの自然同型を 2 項演算 \otimes に対して適用する順序に関して，ある種の整合性条件を満たしていれば，そのような圏 C はモノイダル (*monoidal*) と呼ばれる．これらの条件，特に整合性条件については少しややこしいので，モノイダルの理論の一般論に立ち入らない本稿では省略する．実際，モナドを説明するには，狭義モノイダルさえ考えれば十分であり，一般のモノイダルの概念は必要としない．しかし，一応，以下の例だけには言及しておこう．

例 4.24. 圏が終対象 1 と二項積 \times を持つならば $(V, E, \circ, 1_\bullet, \times, 1)$ はモノイダルである．圏が始対象 0 と二項余積 $+$ を持つならば $(V, E, \circ, 1_\bullet, +, 0)$ はモノイダルである．

例 4.25. グラフとして，実数 (\mathbb{R}, \leq) のハッセ図を考える．このとき，実数上の通常の足し算 $+$ とゼロ 0 に対して， $(\mathbb{R}, +, 0)$ はモノイダルである．実際， $(\mathbb{R}, \leq, +, 0)$ はモノイダルである．

自己関手のなす狭義モノイダル圏: さて, 本題に入ろう. 圏として, 固定した圏 C 上の自己関手 $T: C \rightarrow C$ を頂点とし, 自然変換を辺とする圏 $[C \rightarrow C]$ を考えよう.

よくある圏では, 「辺が写像」であって, 写像の合成 \circ を辺上の垂モノイド演算として定義することが多かった. しかし, この圏 $[C \rightarrow C]$ においては, 「頂点も辺も写像」という特性をもつ. すると, 写像の合成 \circ は, 頂点上と辺上の両方の垂モノイド演算として機能する. つまり, 頂点上では自己関手の合成, 辺上では自然変換の垂直合成という演算がある. そして, 2 項積のときと同様に, 頂点上のこの演算は, 辺上の新たな演算 $*$ を誘導する. 具体的には, 2 つの自然変換 $\alpha: f \Rightarrow g$ と $\beta: f' \Rightarrow g'$ が与えられたとき, これを成分表示してみると,

$$\begin{array}{ccc} f'(f(x)) & \xrightarrow{\beta_{f(x)}} & g'(f(x)) \\ f'(\alpha_x) \downarrow & & \downarrow g'(\alpha_x) \\ f'(g(x)) & \xrightarrow{\beta_{g(x)}} & g'(g(x)) \end{array}$$

は可換となっている. これは, C の辺 $f(x) \xrightarrow{\alpha_x} g(x)$ に対して, $\beta: f' \Rightarrow g'$ が自然変換であることの定義図式から従う. したがって, この対角線 $f'(f(x)) \rightarrow g'(g(x))$ に対して, パス $g'(\alpha_x) \circ \beta_{f(x)}$ を考えても $\beta_{g(x)} \circ f'(\alpha_x)$ を考えても同じことである. このとき,

$$(\beta * \alpha)_x = g'(\alpha_x) \circ \beta_{f(x)} = \beta_{g(x)} \circ f'(\alpha_x)$$

と定義することにしよう. そして, この $\beta * \alpha = ((\beta * \alpha)_x)_{x \in V_C}$ は $f' \circ f$ から $g' \circ g$ への自然変換となる. これは, α と β の水平合成 (*horizontal composition*) と呼ばれる.

ここまでの議論をまとめよう. まず, 自己関手 f, g の合成 $g \circ f$ は, 関手圏 $[C, C]$ 上の頂点上の 2 項演算 $\circ: V_{[C, C]} \times V_{[C, C]} \rightarrow V_{[C, C]}$ である. さらに, 2 つの自然変換 α, β の水平合成 $\beta * \alpha$ は, 関手圏 $[C, C]$ 上の辺上の 2 項演算 $*: E_{[C, C]} \times E_{[C, C]} \rightarrow E_{[C, C]}$ である. この対 $\otimes = (\circ, *)$ は関手 $\otimes: [C, C] \times [C, C] \rightarrow [C, C]$ の条件を満たすことが確かめられる. そして, 実際に

$$(V_{[C \rightarrow C]}, E_{[C \rightarrow C]}, \circ, 1_\bullet, (\circ, *), 1_C)$$

が狭義モノイダルとなる.

モノイダル圏の中では, 頂点 m と辺 $m \otimes m \xrightarrow{\mu} m$ および $1 \xrightarrow{\eta} m$ の 3 つ組 (m, μ, η) がモノイドをなすかどうかを議論できる. たとえば, Set は完備なので, 終対象 1 と 2 項積 \times によってモノイダルである. 圏 Set において, 頂点 M と辺 $M \times M \xrightarrow{*} M$ および $1 \xrightarrow{e} M$ の 3 つ組 $(M, *, e)$ がモノイドであるかどうかを議論することは, 集合 M 上の 2 項演算 $*$ が結合律を満たし, さらに元 $e(\bullet) \in M$ が単位元であるかどうかを確認することである. 結合律とは,

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

を満たすことである. いま, 同型 $a_M: (M \times M) \times M \simeq M \times (M \times M)$ は $((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$

によって与えられることに注意すると、例 3.18 のように、結合律を丁寧に書き下せば、

$$\begin{array}{ccc}
 ((x, y), z) & \xrightarrow{a_M} & (x, (y, z)) \\
 \downarrow * \times 1_M & & \downarrow 1_M \times * \\
 (x * y, z) & & (x, y * z) \\
 & \searrow * & \swarrow * \\
 & (x * y) * z = x * (y * z) &
 \end{array}$$

となっている。単位元については、単位元を関数 $e: \mathbf{1} = \{\bullet\} \rightarrow M$ として表しているため、以下のように書ける。

$$e(\bullet) * x = x = x * e(\bullet)$$

以下、 $e(\bullet) = e$ と略記することにする。いま、同型 $\ell_M: \mathbf{1} \times M \simeq M$ と $r_M: M \times \mathbf{1} \simeq M$ は $(\bullet, x) \mapsto x$ と $(x, \bullet) \mapsto x$ によって与えられる。このとき、例 3.19 と（少し形状を変えているが）同様にして、単位元の性質については以下のように丁寧に書き下すことができる。

$$\begin{array}{ccc}
 (\bullet, x) & \xrightarrow{e \times 1_M} & (e, x) \\
 \swarrow \ell_M & & \downarrow * \\
 & & x = e * x
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (x, e) & \xleftarrow{1_M \times e} & (x, \bullet) \\
 \downarrow * & & \swarrow r_M \\
 x * e = x & &
 \end{array}$$

さて、Set での話なので、集合の元を用いてモノイドとは何たるかを説明したが、集合の元、つまり頂点の内側に入り込むのはあまり行儀がよろしくない。しかし、頂点の内部に入り込まずに、上図を書き直すことができる。

命題 4.26. 集合 M 上の 2 項演算 $*: M \times M \rightarrow M$ と $e: \mathbf{1} \rightarrow M$ の 3 つ組 $(M, *, e)$ がモノイドであることは、以下の図式を可換にすることと同値である。

$$\begin{array}{ccc}
 (M \times M) \times M & \xrightarrow{a_M} & M \times (M \times M) \\
 \downarrow * \times 1_M & & \downarrow 1_M \times * \\
 M \times M & & M \times M \\
 & \searrow * & \swarrow * \\
 & M &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} \times M & \xrightarrow{e \times 1_M} & M \times M & \xleftarrow{1_M \times e} & M \times \mathbf{1} \\
 \swarrow \ell_M & & \downarrow * & & \swarrow r_M \\
 & & M & &
 \end{array}$$

モノイドの公理のローヴェア理論 L_{Mon} の有限積を持つ圏 C におけるモデルについても類似の図式が成立する。例 3.23 の図式は、形状が上の命題とわずかながら異なるが、上の図式の形に修正することは容易である。この特殊なモノイダル圏 $(\text{Set}, \times, \mathbf{1})$ におけるモノイドの定義を一般のモノイダル圏 $(C, \otimes, \mathbf{1})$ に拡張しよう。

定義 4.27. モノイダル圏 $(C, \otimes, 1)$ において, 頂点 m 上の辺 $\mu: m \otimes m \rightarrow m$ と $\eta: 1 \rightarrow m$ の 3 つ組 (m, μ, η) がモノイド (monoid) であるとは, 以下の図式を可換にすることである.

$$\begin{array}{ccc}
 (m \otimes m) \otimes m & \xrightarrow{a_m} & m \otimes (m \otimes m) \\
 \mu \otimes 1_m \downarrow & & \downarrow 1_m \otimes \mu \\
 m \otimes m & & m \otimes m \\
 \mu \searrow & & \swarrow \mu \\
 & m &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 1 \otimes m & \xrightarrow{\eta \otimes 1_m} & m \otimes m & \xleftarrow{1_m \otimes \eta} & m \otimes 1 \\
 \searrow \ell_m & & \downarrow \mu & & \swarrow r_m \\
 & & m & &
 \end{array}$$

ここで, たとえば $[C, C]$ のような狭義モノイダル圏については, a_m, ℓ_m, r_m は特に考える必要はない. つまり, そこは恒等写像としてよい.

例 4.28. ある数学的構造に対し, それと両立するモノイド構造を付加したい, という状況を考えよう. たとえば, われわれは多重有向グラフの辺にモノイドのような構造を付加して, グラフ (圏) という概念を作り上げた. この構成は, 次のように言い表せる. まず, 多重有向グラフの頂点集合 V は固定し, 辺に注目したい. いま, 次のような圏 G_V を考えよう.

1. 頂点は, 集合 E と写像 $\text{dom}, \text{cod}: E \rightarrow V$ の 3 つ組 $E = (E, \text{dom}, \text{cod})$ である.
2. E から E' への辺は, (V, E) から (V, E') への多重有向グラフ準同型である.

この G_V の頂点集合上の 2 項演算 \otimes を次によって定義する.

$$\begin{aligned}
 E \otimes E' &= \{(a, b) \in E \times E' : \text{dom}(b) = \text{cod}(a)\}, \\
 \text{dom}(a, b) &= \text{dom}(a), \quad \text{cod}(a, b) = \text{cod}(b).
 \end{aligned}$$

つまり, (a, b) は辺の結合 $b \circ a$ を表すものと考えてよい. 多重有向グラフ準同型 $f: G \rightarrow (V, E)$ と $g: G \rightarrow (V, E')$ が与えられたとき, 新たな多重有向グラフ準同型 $f \otimes g: G \rightarrow (V, E \otimes E')$ を自明に作ることができるので, G_V の辺集合上の 2 項演算にもなっている. 実際, $\otimes: G_V \times G_V \rightarrow G_V$ は関手である. そして, この演算に対する単位元 1_V は, 頂点集合を V とする離散グラフの辺集合に対応する. つまり,

$$1_V = \{1_x : x \in V\}, \quad \text{dom}(1_x) = \text{cod}(1_x) = x.$$

この 3 つ組 $(G_V, \otimes, 1_V)$ がモノイダルとなる. 実際, 以下の多重有向グラフとしての同型性が成立していることは容易に分かる.

$$(V, (E \otimes E') \otimes E'') \simeq (V, E \otimes (E' \otimes E'')), \quad (V, 1_V \otimes E) \simeq (V, E) \simeq (V, E \otimes 1_V)$$

これらの多重有向グラフ同型は, もちろん G_V 上の辺 $a_E: (E \otimes E') \otimes E'' \rightarrow E \otimes (E' \otimes E'')$, $\ell_E: 1_V \otimes E \rightarrow E$ および $r_E: E \otimes 1_V \rightarrow E$ でもある. これを利用すると, 頂点集合を V とする圏とはつまり, モノイダル圏 $(G_V, \otimes, 1_V)$ におけるモノイドであるということが確かめられる. つまり, 圏とは, 「固定した頂点集合の多重有向グラフ全体のなす辺結合モノイダル圏におけるモノイド」である.

命題 4.29. 圏 C 上のモナド (T, μ, η) とは, 自己グラフ準同型と自然変換のなすモノイダル圏 $([C \rightarrow C], \circ, 1_C)$ におけるモノイドに他ならない.

とはいえ、これはあくまでモナドの定義を一言で説明するだけの主張であり、つまり、まだモナドの定義を述べただけの段階である。もちろん、定義を知ることがゴールではなく、スタートである。ここで話を終えてしまったら、べき集合やリストなどのとてつもなく簡単な数学的概念をわざわざ千倍くらい難しく言い換えただけに過ぎない。定義を知ってスタートラインに立った我々が問うことは、べき集合やリストなどといった初等的概念を、モナドとして抽象化したことによって、我々が新たに何を知ることができるか、である。そのうちのひとつが、後に述べるモナドと自由代数あるいは随伴との関係であり、それが「モナドとは何か」に対する真の答えのひとつであると言えるかもしれない。

4.5. 等式理論と有限モナド

モナドの例に与えるに当たって、いくつかの自由構成を利用した。たとえば、自由モノイド・モナド（リスト・モナド）などである。他にも、自由可換モノイド・モナド（形式表現モナド）などはよく用いられる。

モナドについては「文脈の拡大」として導入したが、一方で、自由代数は「言語の拡張」として導入できる。たとえば、自由モノイドであれば、「二項演算」と「単位元」について語れるように言語が拡張され、自由上半束であれば、「結び（最小上界）」について語れるように言語が拡張される。しかし文脈の拡大も言語の拡張も本質的に同じものであり、したがってモナドと自由代数（自由モデル）には深い関わりがある、ということを見ていこう。

自由代数から得られるモナド：定義 3.10 で導入した、等式理論の自由代数について思い出そう。集合 A が与えられたとき、それに言語 \mathcal{L} を付加し、 T の公理に従う新たな構造 $F_T(A)$ を得ることができた。つまり、 $F_T(A) = (T(A), [f]_{f \in \mathcal{L}})$ を A の生成する自由 T -代数とする。この自由 T -代数の構成から、以下のようにして Set 上のモナド (T, μ, η) を導入できる。

- 関数 $j: A \rightarrow B$ について、 $T(j): T(A) \rightarrow T(B)$ は、項 $t \in T(A)$ に現れるすべての定数 $a \in A$ を $j(a) \in B$ に置換したものである。ここで、項 t において定数 $a \in A$ は常に定数記号 \check{a} の形で現れていることに注意する。
- n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ と項 $t_0, \dots, t_n \in T(A)$ が与えられているとき、 $\mu_A([f(\check{t}_0, \dots, \check{t}_n)]) = [f](t_0, \dots, t_n)$ と定義する。ここで \check{t}_i とは、項 t_i を定数記号とみなしたものである。
- 単位 $\eta_A: A \rightarrow T(A)$ は、 $\eta_A(a) = [\check{a}]$ によって与えられている。

以上をまとめると、「等式理論あるところにモナドあり」ということである。等式理論を作るのは簡単である。まず、何か使う記号のリスト \mathcal{L} を固定する。そして、その記号を使って作った項の間の等式を適当にリストアップする。項を集めて、等しい項を同一視すれば、項モデル、すなわち自由代数がそこにある。すると、そこには既にモナドができています。こうして誰にでも無限に多くのモナドを作れることだろう。

ローヴェア理論から得られるモナド：つづいて、ローヴェア理論の自由モデル（第 3.4 節）につ

いても思い出そう．等式理論の場合と同様に，ローヴェア理論 L が与えられたとき，与えられた台集合から自由代数を作り，そこから構造を忘却する，という操作からモナドが得られる．具体的には，以下のようにして，Set 上のモナド (T, μ, η) を構成する．

- まず， $T = U_L F_L$ と定義する．つまり，集合 A が与えられたとき， $T(A)$ を A を定数記号に加えた閉項全体の集合 $U_L F_L(A) = \langle A \rangle$ として定義する．

関数 $j: A \rightarrow B$ について， $T(j) = j^*: T(A) \rightarrow T(B)$ は，閉項 $(t, \bar{a}) \in T(A)$ に現れる定数 $\bar{a} = a_1, \dots, a_n \in A$ を $j(a_1), \dots, j(a_n) \in B$ に置換したものである．

$$T(j): (t; a_1, \dots, a_n) \mapsto (t; j(a_1), \dots, j(a_n)).$$

- L の辺 $\square^n \xrightarrow{s} \square$ と閉項 $(t_1; \bar{a}_1), \dots, (t_n; \bar{a}_n) \in T(A)$ が与えられているとき， $\mu_A: TT(A) \rightarrow T(A)$ を次のように定義する．

$$\mu_A: (s; (t_1; \bar{a}_1), \dots, (t_n; \bar{a}_n)) \mapsto (s \circ (t_1 \times \dots \times t_n); (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)).$$

これについて説明しておく． μ_L の入力側については，項 $s(x_1, \dots, x_n)$ に定数記号 $t_1(\bar{a}_1), \dots, t_n(\bar{a}_n)$ が代入されていると読む．一方，出力側では項 $s(t_1(\bar{x}_1), \dots, t_n(\bar{x}_n))$ に定数記号 $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ が代入されている．

- 単位 $\eta_A: A \rightarrow T(A)$ は， $\eta_A(a) = (1_\square; a)$ によって与えられる．つまり，元 $a \in A$ を定数記号単体からなる項 $(1_\square; a)$ に変換している．

これがモナドをなすことの証明はルーチンであるが，部分的に証明を与えておこう，

命題 4.30. L がローヴェア理論ならば，上で定義された (T, μ, η) は Set 上のモナドである．

Proof. T が Set 上の自己関手であることは， F_L と U_L が関手であることから従う．まずは η と μ が自然変換であることを示す．単位 η については，以下の図式は明らかに可換である．

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\ j \downarrow & & \downarrow T(j) \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & T(B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\eta_A} & (1_\square; a) \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ j(a) & \xrightarrow{\eta_B} & (1_\square; j(a)) \end{array}$$

以後の議論については，記号が煩雑になるのを避けるために，1変数項について証明を与える．一般の項については，読者の演習問題とする．まず， μ が自然変換であることを確認するために， $TT(j): TT(A) \rightarrow TT(B)$ について注意しよう．これは，1変数項 $(s; (t; a)) \in TT(A)$ に対しては以下のように振る舞う．

$$TT(j)(s; (t; a)) = (s; T(j)(t, a)) = (s; (t; j(a))).$$

したがって、以下の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccc}
 TT(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \\
 TT(j) \downarrow & & \downarrow T(j) \\
 TT(B) & \xrightarrow{\mu_A} & T(B)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (s; (t; a)) & \xrightarrow{\mu_A} & (s \circ t; a) \\
 TT(j) \downarrow & & \downarrow T(j) \\
 (s; (t; j(a))) & \xrightarrow{\mu_A} & (s \circ t; j(a))
 \end{array}$$

また、モナド結合律については、まず $T(\mu_A): TTT(A) \rightarrow TT(A)$ が、1 変数項 $(s; (t; (u; a))) \in TTT(A)$ に対して以下のように振る舞う．

$$T(\mu)(s; (t; (u; a))) = (s; \mu(t; (u; a))) = (s; (t \circ u; a)).$$

よって、以下の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccc}
 TTT(A) & \xrightarrow{T(\mu_A)} & TT(A) \\
 \mu_{T(A)} \downarrow & & \downarrow \mu_A \\
 TT(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (s; (t; (u; a))) & \xrightarrow{T(\mu)} & (s; (t \circ u; a)) \\
 \mu_{T(A)} \downarrow & & \downarrow \mu_A \\
 (s \circ t; (u; a)) & \xrightarrow{\mu_A} & ((s \circ t) \circ u; a) = (s \circ (t \circ u); a)
 \end{array}$$

つづいて、単位律であるが、これは簡単である．一応 $T(\eta_A): T(A) \rightarrow TT(A)$ について注意しておけば、1 変数項 $(t; a) \in T(A)$ については $T(\eta)(t; a) = (t; \eta_A(a)) = (t; (1_{\square}; a))$ である．

$$\begin{array}{ccc}
 T(A) & \xrightarrow{\eta_A} & TT(A) & \xleftarrow{T(\eta_A)} & T(A) \\
 \text{id} \searrow & & \downarrow \mu_A & & \swarrow \text{id} \\
 & & T(A) & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (t; a) & \xrightarrow{\eta_A} & (1_{\square}; (t; a)) \\
 \text{id} \searrow & & \downarrow \mu_A \\
 & & (1_{\square} \circ t; a) = (t \circ 1_{\square}; a)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (t; (1_{\square}; a)) & \xleftarrow{T(\eta_A)} & (t; a) \\
 \mu_A \downarrow & & \swarrow \text{id} \\
 (t \circ 1_{\square}; a) & &
 \end{array}$$

以上の議論を 1 変数項のみでなく一般の項に拡張すれば、 (T, μ, η) がモナドであることが従う．証明の方針は上記の議論を多変数に拡張するだけであるから、詳細については読者の演習問題とする． \square

さて、それでは、どの程度のモナドがローヴェア理論から作られるだろうか．ローヴェア理論 L から作られたモナドの特性としては、 A が生成する自由モデル $T(A) = \langle A \rangle$ の各元、つまり個々の項は、 A の有限個の元にしかアクセスしない、というものがある．つまり、

$$\begin{aligned}
 u \in \langle A \rangle &\iff (\exists a_0, \dots, a_{n-1} \in A) (\exists t \in L(\square^n, \square)) u = (t; a_0, \dots, a_{n-1}) \\
 &\iff (\exists a_0, \dots, a_{n-1} \in A) u \in \langle \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \rangle.
 \end{aligned}$$

ローヴェア理論から作られたモナドは、このような意味で“有有限的”である．この有有限的なモナドという概念を定式化しよう．まず、集合 A から n 個の元 a_0, \dots, a_{n-1} を抽出することと、関数 $a: n \rightarrow A$ を指定することは同値である．ここで、 $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ であり、つまり $a(i) = a_i$ と考える．少々分かりにくいので、関手（グラフ準同型）が頂点上の写像と辺上の写像

の対 $T = (\langle - \rangle, -^*)$ であったことを明示化すれば、次のように言い換えることができる。

$$\begin{aligned}
u \in \langle A \rangle &\iff (\exists a_0, \dots, a_{n-1} \in A) (\exists t \in L(\square^n, \square)) u = (t; a_0, \dots, a_{n-1}) \\
&\iff (\exists a: n \rightarrow A) (\exists t \in L(\square^n, \square)) u = (t; a(0), \dots, a(n-1)) \\
&\iff (\exists a: n \rightarrow A) (\exists t \in L(\square^n, \square)) u = a^*(t; 0, \dots, n-1) \\
&\iff (\exists a: n \rightarrow A) u \in a^*[\langle \{0, \dots, n-1\} \rangle] \\
&\iff (\exists a: n \rightarrow A) u \in a^*[\langle n \rangle].
\end{aligned}$$

ここで、集合 X の写像 h の下での像を $h[X] = \{h(x) : x \in X\}$ で表す。このように、 $T(A)$ の各元が A の有限個の値から決定されるという性質をモナドの有限性の定義としよう。一般に、 Set 上の関手 $T = (T_V, T_E)$ に対しては、以下のように定義が与えられる。

定義 4.31. (T, μ, η) を Set 上のモナドであるとする。このとき、 (T, μ, η) が有限的 (*finitary*) であるとは、以下を満たすことを意味する。

$$u \in T_V(A) \iff (\exists a: n \rightarrow A) u \in T_E(a)[T_V(n)].$$

さて、ローヴェア理論から作られたモナドは必ず有限的であった。そして、その逆も成立する、というものが次の定理である。つまり、 Set 上の有限的なモナドはすべて、上記の方法でローヴェア理論から作られる。

定理 4.32. ローヴェア理論と有限的モナドの間の次の条件を満たす変換 $L \mapsto T_L$ および $T \mapsto L_T$ が存在する：

1. L がローヴェア理論ならば T_L は有限的モナドであり、 $L_{T_L} \simeq L$ である。
2. T が有限的モナドならば L_T はローヴェア理論であり、 $T_{L_T} \simeq T$ である。

Proof. ローヴェア理論 L が与えられたとき、上の方法で構成した有限的モナドを (T_L, μ_L, η_L) と書くことにする。逆に、与えられた有限的モナド (T, μ, ν) に対して、ローヴェア理論 L_T を次によって定義する。

$$L_T(\square^n, \square^m) = (Tn)^m.$$

つまり、各辺 $\square^n \xrightarrow{t} \square$ は Tn の元であり、一般に $\square^n \xrightarrow{t} \square^k$ は Tn の元の m 組である。言い換えれば、 Tn の元を n 変数項とする理論を考える。

つづいて、同型 $L_{T_L} \simeq L$ および $T_{L_T} \simeq T$ があることを確認しよう。まず、

$$L_{T_L}(\square^n, \square^m) = (T_L n)^m = (F_L n(\square))^m.$$

ここで、 $F_L n(\square)$ は定義より、 n 個の定数記号を加えた閉項全体の集合である。しかし、この n 個の定数記号を n 個の変数記号だと思えば、 n 変数項全体の集合 $L(\square^n, \square)$ を考えることと同様で

ある．つまり， $F_{L_T}n(\square) \simeq L(\square^n, \square)$ である．よって，

$$L_{L_T}(\square^n, \square^m) = (F_{L_T}n(\square))^m \simeq L(\square^n, \square)^m \simeq L(\square^n, \square^m)$$

を得る．また，同様の議論から，

$$T_{L_T}n = F_{L_T}n(\square) \simeq L_T(\square^n, \square) = Tn$$

が従う． □

この定理の結論のひとつとして，有限的モナドの話は等式理論の話と同じものである，ということが言える．したがって，必要があれば，有限的モナドを用いる議論は，圏論を用いない等式理論の話に翻訳して議論することも可能である．

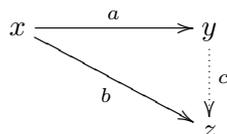
本節では，有限モナドは等式理論の自由モデルと対応することを確認したが，第 6 節では，等式理論の自由モデルの概念を一般化することにより，ありとあらゆるモナドは何らかの自由代数と対応するということを示す．

§ 5. 普遍射，随伴，そしてモナド

さて，ここまで等式理論（ローヴェア理論）を考え，自由代数からモナドを得られることを見た．自由代数の持つ性質を抽象化することによって，われわれはまだ先のステップに進むことができる．

5.1. 自由代数と普遍射

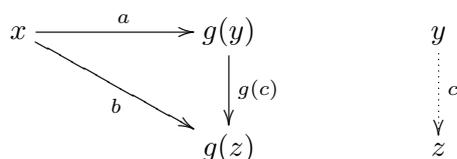
普遍射の定義：自由代数の持つ性質を捉えるものが，普遍射性 (universal mapping property) である．まず，これをグラフ理論の観点から整理しておこう．第 2 節において極限や余極限について少し学んだが，これらの概念はグラフの動的な側面を見ているとも言えるかもしれない．まず，余極限の復習のために，1 点グラフ型図の余錘，つまり \bullet 型図の余錘に関して考えてみよう．グラフ C が与えられているとすると， C の中の \bullet 型図とは， C の頂点 $x \in C$ を 1 つ選ぶことである．この \bullet 型図 x の余錘とは， x を始点とする C の任意の辺 $x \xrightarrow{a} y$ である．したがって， \bullet 型図 x の余極限とは，余錘の中で最も内側にあるもののことであつたから，つまり， C の辺 $x \xrightarrow{a} y$ であり，どんな辺 $x \xrightarrow{b} z$ が与えられても，以下を可換にする唯一の辺 $y \xrightarrow{c} z$ が存在するものである．



もちろん，1 点グラフ型図の余極限は自明なものなので，これはあまり面白いものではない．これを面白い話にするために，グラフ C の中に D 型図 $g: D \rightarrow C$ が描かれているとしよう．同時に，先程と同じように \bullet 型図 x も与えられているとする．この \bullet 型図 x の余錘を “ D 型図 g の中

で描く”ことを考える．具体的には， \bullet 型図 x の“ D 型図 g の中での”余錘とは， D 型図内の頂点へ向かう C の辺 $x \xrightarrow{a} g(y) \in E_C$ と頂点 $y \in V_D$ の対である．なぜ辺 $x \xrightarrow{a} g(y)$ 単体を考えないかといえは，辺 $x \xrightarrow{a} g(y)$ の情報だけでは頂点 y が一意には決まらないためである．そして，“ D 型図 g の中での”余極限とは，そのような余錘 $x \xrightarrow{a} g(y)$ のうち“ D 型図 g の中で”最も内側にあるものである．

つまり， \bullet 型図 x の“ D 型図 g の中での”余極限とは， C の辺 $x \xrightarrow{a} g(y)$ と D の頂点 y の対であり，どんな C の辺 $x \xrightarrow{b} g(z)$ と頂点 $z \in D$ が与えられても，以下を可換にする唯一の D の辺 $y \xrightarrow{c} z$ が存在するものである．



この概念になると少し面白いものになる．まず \bullet 型図 x の余極限は， x 自身と同型である．しかし， D 型図 g の中に制限すると， D 型図の中に x がいない場合には，その余極限は， x とは異なるものになっているはずである．もし u から v へ有向辺 $u \xrightarrow{v}$ が出ていることを「 v が u より大きい」あるいは「 v は u を含む」と解釈するならば， \bullet 型図 x の“ D 型図 g の中での”余極限とは，大雑把に言ってしまえば，「 D 型図 g に属すものの中で x を含む最小のもの」となる．

この \bullet 型図 x の“ D 型図 g の中での”余極限の概念には，特別な名前が付いており， x から g への普遍射 (*universal morphism*) と呼ばれる．つまり，上の条件を満たす頂点 $y \in V_D$ と辺 $x \xrightarrow{a} g(y) \in E_C$ の対 (y, a) のことを普遍射と呼ぶ．上に書いた解説は，コンマ圏 $x \downarrow g$ の始対象として普遍射を定義することに近いが，その正確な対応については，本稿ではコンマ圏を扱わないので省略する．

自由関手と普遍射：さて，これまでに様々な自由代数を見てきた．集合 A が生成する自由代数というものを一言で述べるならば，「付加的な構造を持つものの中で A を含む最小のもの」という感じであろうか．おや，普遍射を説明する際にも，似たような文言を用いていたが，自由代数と普遍射には何か関係があるのだろうか．

まず，自由代数 (項モデル) の特性のひとつは，その最小性である．つまり，等式理論 T の項モデル I_T から， T の任意のモデル M への準同型 $I_T \rightarrow M$ が存在する．この意味で，項モデルは T のモデルの圏 $\text{Mod}(T)$ における始対象であると言える．より一般に，集合 A が生成する自由代数 $F_T(A)$ は， A を含むモデルの中で最小になる．集合 A を含むという性質をグラフ的に説明したいが， A は Set の頂点であり， $F_T(A)$ は $\text{Mod}(T)$ の頂点であるから， A と $F_T(A)$ が別のグラフにいたことが問題となる．しかし， $F_T(A)$ の構造を忘却して，その台集合 $|F_T(A)|$ を見ることによって， A も $|F_T(A)|$ も両方とも Set の頂点になる．このとき，包含写像 $A \xrightarrow{\eta_A} |F_T(A)|$ を考えよう．自由代数の最小性は，他の A を含むどんなモデル $A \xrightarrow{x} |M|$ についても，自由代数 $F_T(A)$

から M への準同型 $F_T(A) \rightarrow M$ が存在することを保証する。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & |F_T(A)| \\
 & \searrow r & \downarrow |\hat{r}| \\
 & & |M|
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & F_T(A) \\
 & & \vdots \hat{r} \\
 & & M
 \end{array}$$

モデル M は A を含むと言ったが、実はそうでなくても上の図式は成立し、 $A \xrightarrow{r} |M|$ は包含写像でなくともよい。上の図式を普遍射の定義と見比べてみれば、 $(F_T(A), \eta_A)$ は A から $|-|$ への普遍射となる、という主張である。ここで、 $|-|: \text{Mod}(T) \rightarrow \text{Set}$ を関手として見ている。つまり、自由代数の特性として、元の文脈における関数を、拡大された文脈（言語 \mathcal{L} の付加）における準同型に一意に拡張できる、ということである。

例 5.1. 上の図式が一般の自由代数で成立することをすぐ下で示すが、まずはモノイドで様子を見てみよう。集合 A とモノイド $M = (|M|, *_M, e_M)$ が与えられていたとしよう。どんな関数 $r: A \rightarrow |M|$ が与えられても、これを自由モノイド $F_T(A) = (A^*, *, \varepsilon)$ からモノイド M へのモノイド準同型 $\hat{r}: F_T(A) \rightarrow M$ に一意に拡張できる。具体的には、 \hat{r} とは、文字列（つまり項） $x \in A^*$ に出現する元（つまり定数記号） $a \in A$ をすべて $r(a) \in |M|$ に置換し、さらに文字列結合記号（2項関数記号） $*$ を $*_M$ に置換、空語記号（定数記号） ε を e_M に置換したものである。

この議論は、一般の等式理論（ローヴェア理論）においても成り立つ。ローヴェア理論 L に対して、自由関手 $F_L: \text{Set} \rightarrow \text{Mod}(L)$ および忘却関手 $U_L: \text{Mod}(L) \rightarrow \text{Set}$ とそこから得られるモナド単位 $\eta: 1_{\text{Set}} \Rightarrow T$ は前の節で説明したとおり、元 $a \in A$ を定数記号単独からなる項 $\eta_A(a) = (1_{\square}; a)$ に変換するものであった。

命題 5.2. L をローヴェア理論とする。このとき、任意の集合 A について、 $(F_L(A), \eta_A)$ は A から U_L への普遍射である。

Proof. A を集合、 $M = (|M|, -^M)$ を Set における L のモデルとする。与えられた関数 $r: A \rightarrow U_L(M)$ に対して、以下を可換にするモデル準同型 $\hat{r}: F_L(A) \rightarrow M$ が一意に存在することを示せばよい。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & U_L F_L(A) \\
 & \searrow r & \downarrow U_L(\hat{r}) \\
 & & U_L(M)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & F_L(A) \\
 & & \vdots \hat{r} \\
 & & M
 \end{array}$$

以下、議論を明確にするために、自由代数つまり閉項モデル $F_L(A)$ の元 $(t, a_1, \dots, a_n) \in F_L(A)(\square)$ を項 $t^A(a_1, \dots, a_n)$ として略記する。上の図式を可換にする \hat{r} については、項 $t^A(a_1, \dots, a_n) \in F_L(A)(\square)$ が与えられたら、

$$\hat{r}: t^A(a_1, \dots, a_n) \mapsto t^M(r(a_1), \dots, r(a_n))$$

と定義してやればよい．このとき，

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\eta_A} & (1_{\square}, a) \\
 & \searrow r & \downarrow U_L(\hat{r}) \\
 & & r(a) = 1_{\square}^M(r(a))
 \end{array}$$

となるので， \hat{r} が目的の性質を持つことが示された．一意性については，モデル準同型の定義より，任意の項 t について，

$$\hat{r}(t^A(a_1, \dots, a_n)) = t^M(r(a_1), \dots, r(a_n))$$

を満たさなければならないから， $\hat{r}(t^A(\bar{a}))$ の値は， $r(a_i)$ の情報から一意に定まる． □

さて，上述の普遍性は，ある写像の一意存在性を保証するものであるが，これをもう少し分析しよう．集合 A とローヴェア理論 L のモデル M が与えられているとしよう．存在性が述べることは，任意の関数 $f: A \rightarrow |M|$ は， L のモデルの間の準同型 $F_L(f): F_L(A) \rightarrow M$ へと拡張できる，ということである．一方で，一意性が述べることは，次である．まず， L のモデルの間の準同型 $h: F_L(A) \rightarrow M$ が与えられたとき， $\theta(h) = U_L(h) \circ \eta_A$ と定義することができる．しかし， $\theta(h)$ に対応する $F_L(\theta(h)): F_L(A) \rightarrow M$ は再び上の図式を可換にするので，一意性の条件より， $F_T(\theta(h)) = h$ に他ならない．

つまり， \mathbf{Set} における A から $U_L(M)$ の辺と L のモデルの圏 $\mathbf{Mod}(L)$ における $F_L(A)$ から M の辺が一对一に対応する．圏 C の頂点 x と y を結ぶ辺全体の集合を $C(x, y)$ と書いていたことを思い出すと，この議論は，次のようにまとめることができる．

$$\mathbf{Set}(A, U_L(M)) \simeq \mathbf{Mod}(L)(F_L(A), M).$$

さらに言えば，自然な一対一対応があるのであるが，それについては後で詳述する．この事実 は，集合と関数の圏 \mathbf{Set} とローヴェア理論 L のモデルと準同型の圏 $\mathbf{Mod}(L)$ の間には，以下のような双方向推論があると言い表される．

$$\frac{F_L(A) \longrightarrow M \quad \text{in } \mathbf{Mod}(L)}{A \longrightarrow U_L(M) \quad \text{in } \mathbf{Set}}$$

これから見ることは，まず第一に，このような関係があれば，たとえそれが等式理論あるいはローヴェア理論の意味での自由代数でなくとも，常にモナドを得られる，ということである．そして，第二に，モナドからは常に，ある意味で「自由代数っぽいもの」を作り出すことができ，そこから元のモナドを復元できる，ということを見る．

5.2. 随伴の定義

さきほどの自由代数に関する議論は，「自由代数の構成」 $F_L: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mod}(L)$ と「構造の忘却」 $U_L: \mathbf{Mod}(L) \rightarrow \mathbf{Set}$ が良い関係にある，と述べるものであった．一般に，グラフ C と D の間の

準同型 $f: C \rightarrow D$ と $g: D \rightarrow C$ について、次のような良い関係がある、ということが数学においてしばしばある。

$$f(x) \rightarrow y \in E_D \iff x \rightarrow g(y) \in E_C.$$

例 5.3. 簡単な例として、整数上の標準的な順序 (\mathbb{Z}, \leq) と実数上の標準的な順序 (\mathbb{R}, \leq) のハッセ図を考える。このとき、埋め込み $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\iota(n) = n$ によって定義すれば、もちろんこれはハッセ図上の準同型である。逆に、天井関数 $\lceil \cdot \rceil: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ と床関数 $\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ というものがある。天井関数は上からの最良整数近似 $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\}$ として、床関数は下からの最良整数近似 $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ として定義される。天井関数と床関数がハッセ図上の準同型（つまり順序保存写像）であることは容易に確認できる。さらに、任意の $x \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{N}$ について、次の性質が成立している。

$$\begin{aligned} \lceil x \rceil \leq n &\iff x \leq \iota(n), \\ \iota(n) \leq x &\iff n \leq \lfloor x \rfloor. \end{aligned}$$

つまり、 $\lceil \cdot \rceil$ と ι は良い関係にあり、 ι と $\lfloor \cdot \rfloor$ も良い関係にある。この関係を記号的に $\lceil \cdot \rceil \dashv \iota \dashv \lfloor \cdot \rfloor$ と書く。

天井関数と床関数は自明な例であるが、この上下からの最良近似というアイデアは、このような良い関係の例を見つけるのに有用である。

例 5.4. たとえば、 L を束（上限 \vee と下限 \wedge を持つ半順序）としたとき、次のような下からの最良近似の存在が問題になることがある。

$$a \Rightarrow b := \max\{x \in L : a \wedge x \leq b\}.$$

この $a \Rightarrow b$ はハイティング含意 (Heyting implication) と呼ばれる。任意の $a, b \in L$ について $a \Rightarrow b$ が存在するような有界束 L が、ハイティング代数 (Heyting algebra) と呼ばれるものである。言い換えれば、「ならば」は「かつ」の上からの最良近似として与えられる。そして、このとき、以下の性質が満たされる。

$$c \wedge a \leq b \iff c \leq a \Rightarrow b$$

つまり、 $f(x) = x \wedge a$ かつ $g(y) = a \Rightarrow y$ とすれば、ハイティング代数 L のハッセ図の間の準同型 f と g は良い関係にある。ハイティング代数のハッセ図の代わりに、これを論理式のグラフを考えれば、次が成立しているということである。

$$C \wedge A \text{ を仮定すると } B \text{ を証明できる} \iff C \text{ を仮定すると } A \rightarrow B \text{ を証明できる.}$$

また、論理を空間的に見れば、「かつ」は「直積空間」に対応し、「ならば」は「関数空間」に対応する。これを利用すると、上の「かつ」と「ならば」の良い関係は、「直積空間」と「関数空間」の良い関係に拡張できる。これについては後で説明しよう。

一応、これまでの話をまとめると、頂点に関して

$$\frac{f(x) \longrightarrow y \quad \text{in } D}{x \longrightarrow g(y) \quad \text{in } C}$$

となっていた。多重辺や重みのない有向グラフ、つまり半順序のハッセ図の場合にはこれでよい。

しかし、われわれのグラフ概念は半順序とモノイドのキメラである．半順序における例だけでなくモノイドにおける例も挙げなければ、重要な例を見過ぎてしまう．そういうわけで、モノイド C, D について考えよう．上の式の頂点を辺に置き換えると、次のようになる．

$$\frac{\bullet \xrightarrow{f(x)} \bullet \longrightarrow \bullet \xrightarrow{y} \bullet \quad \text{in } D}{\bullet \xrightarrow{x} \bullet \longrightarrow \bullet \xrightarrow{g(y)} \bullet \quad \text{in } C}$$

上式の中央の辺を $\bullet \xrightarrow{e} \bullet$ とする．これに対応する下式の中央の辺は $\bullet \xrightarrow{\theta(e)} \bullet$ と取ってこれなければならない．また、上下両方向の推論があるため、下式から上式へ方向性もあるから、この θ は辺の間の全単射であると考えてよい．つまり、 D の辺を C の辺に写す全単射 θ が存在するということである．しかし、与えられた θ に対して、上式の D の辺から 2 種類の C の辺が作られる．

$$\bullet \xrightarrow{f(x)} \bullet \xrightarrow{e} \bullet \xrightarrow{y} \bullet \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{x} \bullet \xrightarrow{\theta(e)} \bullet \xrightarrow{g(y)} \bullet \\ \parallel? \\ \theta(\bullet \xrightarrow{f(x)} \bullet \xrightarrow{e} \bullet \xrightarrow{y} \bullet) \end{array}$$

右の 2 つの辺は一致してほしい、というのがわれわれの要請するところである．式で表せば、辺の間の全単射 θ で、以下の条件を満たすことを要求する．

$$\theta(y \circ e \circ f(x)) = g(y) \circ \theta(e) \circ x.$$

いまいよいよよくわからない性質なので、頂点も辺も非自明なものを例にとって説明しよう．その場合の状況としては、以下のような感じである．

$$\frac{f(x) \xrightarrow{f(a)} f(c) \longrightarrow d \xrightarrow{b} y \quad \text{in } D}{x \xrightarrow{a} c \longrightarrow g(d) \xrightarrow{g(b)} g(y) \quad \text{in } C} \quad (2)$$

いま、上式中央の辺 $f(c) \longrightarrow d$ を下式中央の辺 $c \longrightarrow g(d)$ に移す写像を θ_{cd} と書くとしよう．先ほどと同様に、上式中央の辺を θ_{cd} で下式中央の辺に移した結果と、上式全体の辺を θ_{xy} で下式全体の辺に移した結果が一致することを要請する．図式を使って表せば、以下のように書ける．

$$\begin{array}{ccc} f(c) & \xrightarrow{e} & d \\ f(a) \uparrow & & \downarrow b \\ f(x) & \xrightarrow{p} & y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\theta_{cd}(e)} & g(d) \\ a \uparrow & & \downarrow g(b) \\ x & \xrightarrow{\theta_{xy}(p)} & g(y) \end{array}$$

上で述べた要請は、左図が可換であれば、右図も可換であるということである．たとえば $p = b \circ e \circ f(a)$ とすれば少なくとも左図は可換になる．もし右図も可換になるような全単射の族 $(\theta_{cd}: D(f(c), d) \simeq C(c, g(d)))_{c,d}$ が存在するのであれば、 f が g の左随伴であるといい、このとき $f \dashv g$ と書く．右図が可換になることの条件を数式として書き下せば、この定義は以下のように述べることができる．

定義 5.5 (随伴の定義その 1). $f: C \rightarrow D$ と $g: D \rightarrow C$ を関手とする. もし全単射の族

$$(\theta_{cd}: C(f(c), d) \simeq D(c, g(d)))_{c \in C, d \in D}$$

が存在して, C の任意の辺 $x \xrightarrow{a} c$ と D の任意の辺 $d \xrightarrow{b} y$ と $f(c) \xrightarrow{e} d$ について, 等式

$$\theta_{cd}(b \circ e \circ f(a)) = g(b) \circ \theta_{cd}(e) \circ a$$

が成立するならば, f は g の左随伴 (*left adjoint*) である, あるいは g は f の右随伴 (*right adjoint*) であるといい, このとき $f \dashv g$ と書く.

少しややこしい等式なので, 実際に使うときには上下推論式 (2) も念頭に置いておくといい. また, この随伴の性質は, 簡潔に一言で言い表すことができる:

$$\theta: D(f(-), -) \simeq C(-, g(-)) \text{ は自然同型である.}$$

したがって, 先ほど考えた $\theta_{c,d}: D(f(c), d) \simeq C(c, g(d))$ は, この自然同型の (c, d) 成分である. しかし, 自然変換とは, 関手を関手に変換するものだったはずである. すると, われわれは関手 $D(f(-), -)$ と $C(-, g(-))$ を考えている, ということであるが, これらがどこからどこへの関手であるかを明示すべきであろう.

まずは単なる $C(-, -)$ に注目しよう. 始域 x を固定すると, 関手 $C(x, -): C \rightarrow \text{Set}$ を得る. 関手とはグラフ準同型であったから, 頂点上の写像と辺上の写像の対である. 頂点上の写像については明らかであるが, 辺上の写像はどのように定義されるだろうか. つまり, C の辺 $y \xrightarrow{b} z$ に対して, $C(x, y \xrightarrow{b} z): C(x, y) \rightarrow C(x, z)$ が定義されなければならない. 一方, 辺 $x \xrightarrow{e} y \in C(x, y)$ が与えられたら, これを $y \xrightarrow{b} z$ と繋げると, $x \xrightarrow{e} y \xrightarrow{b} z \in C(x, z)$ となっている.

$$\begin{array}{ccc} x \xrightarrow{e} y & \in & C(x, y) \\ \parallel & & \downarrow C(x, y \xrightarrow{b} z) \\ x \xrightarrow{b \circ e} z & \in & C(x, z) \end{array}$$

つづいて, 終点を固定して, $C(-, w)$ を考えよう. 同じように, C の辺 $v \xrightarrow{a} u$ を持ってきたとして, 今回は $C(u \xleftarrow{a} v, w): C(u, w) \rightarrow C(v, w)$ を定義しよう. これもまた, $u \xrightarrow{e} w$ が与えられたら, これを $v \xrightarrow{a} u$ と繋げると, $v \xrightarrow{a} u \xrightarrow{e} w \in C(v, w)$ となっている.

$$\begin{array}{ccc} u \xrightarrow{e} w & \in & C(u, w) \\ \uparrow a & & \downarrow C(u \xleftarrow{a} v, w) \\ v \xrightarrow{e \circ a} w & \in & C(v, w) \end{array}$$

一応, 関手としては $C(-, w): C^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ であることには注意する. これを組み合わせると, 関

手 $C(-, -): C^{\text{op}} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$ を得る :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{e} & y \\ a \uparrow & & \downarrow b \\ v & \xrightarrow{b \circ e \circ a} & z \end{array} & \in & C(u, y) \\
 & & \downarrow C(u \xleftarrow{a} v, y \xrightarrow{b} z) \\
 & & C(v, z)
 \end{array}$$

それでは、結局 $D(f(-), -)$ と $C(-, g(-))$ とは何であったかという問題に立ち返ろう。まず、関手としては以下の形である。

$$D(f(-), -): C^{\text{op}} \times D \rightarrow \mathbf{Set}, \quad C(-, g(-)): C^{\text{op}} \times D \rightarrow \mathbf{Set}.$$

自然変換 $\theta: D(f(-), -) \rightarrow C(-, g(-))$ とは、各頂点 $(c, d) \in C^{\text{op}} \times D$ に対する \mathbf{Set} の辺 $D(f(c), d) \xrightarrow{\theta_{cd}} C(c, g(d))$ の割り当てであって、どんな辺 $c \xleftarrow{a} x$ と $d \xrightarrow{b} y$ が与えられても以下を満たすものであった。

$$\begin{array}{ccc}
 D(f(c), d) & \xrightarrow{\theta_{cd}} & C(c, g(d)) \\
 \downarrow D(f(c) \xleftarrow{f(a)} f(x), d \xrightarrow{b} y) & & \downarrow D(c \xleftarrow{a} x, g(d) \xrightarrow{g(b)} g(y)) \\
 D(f(x), y) & \xrightarrow{\theta_{xy}} & C(x, g(y))
 \end{array}$$

また、実際には自然同型であるから、各 θ_{cd} は可逆である。しかし、 θ_{cd} は \mathbf{Set} の辺なので、 \mathbf{Set} における可逆性とはつまり、 θ_{cd} が全単射であるということである。さて、上の図式の中身を解体すれば、以下の2つの図式が現れる。

$$\begin{array}{ccc}
 f(c) & \xrightarrow{e} & d \\
 f(a) \uparrow & & \downarrow b \\
 f(x) & \xrightarrow{p} & y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\theta_{cd}(e)} & g(d) \\
 a \uparrow & & \downarrow g(b) \\
 x & \xrightarrow{\theta_{xy}(p)} & g(y)
 \end{array}$$

これは、まさに随伴の定義に現れた図式である。したがって、われわれは随伴を以下のように定義することもできる。

定義 5.6 (随伴の定義その2). 関手 $f: C \rightarrow D$ と $g: D \rightarrow C$ が与えられているとする。もし、関手 $D(f(-), -), C(-, g(-)): C^{\text{op}} \times D \rightarrow \mathbf{Set}$ の間の自然同型が存在する

$$D(f(-), -) \simeq C(-, g(-))$$

ならば、 f は g の左随伴 (*left adjoint*) である、あるいは g は f の右随伴 (*right adjoint*) であるといい、 $f \dashv g$ と書く。

5.3. 随伴の例

第 5.1 節の議論より, 随伴の基本的な例として, 自由代数の構成 (自由関手) $F_L: \text{Set} \rightarrow \text{Mod}(L)$ と構造の忘却 (忘却関手) $U_L: \text{Mod}(L) \rightarrow \text{Set}$ の間の随伴 $F_L \dashv U_L$ がある. しかし, 他にも随伴の例は無数にある. 本稿では, 以下の 4 種類の随伴を扱うことにしよう.

1. 直積および直和は, 対角関手 Δ (後で定義する) と随伴の関係にある:

$$+ \dashv \Delta \dashv \times.$$

2. J 型図に関する極限および余極限は, J 型の対角関手 Δ_J と随伴の関係にある:

$$\text{colim}_J \dashv \Delta_J \dashv \lim_J.$$

3. 関数空間の構成とは, 直積空間の構成の右随伴である:

$$- \times Z \dashv -^Z.$$

4. 全称量化 \forall および存在量化 \exists は, 変数を 1 つ忘却する項 $\pi(x, y) = y$ の代入 π^* と随伴の関係にある:

$$\exists \dashv \pi^* \dashv \forall$$

(1) 直積, 直和と対角関手の随伴: まず, 対角関手 Δ とは何であるかについて説明しよう. その前に, 多重有向グラフや圏の直積概念についておさらいしよう. 多重有向グラフあるいは圏 G と H の積 $G \times H$ は以下によって定義される.

$$\begin{aligned} V_{G \times H} &= V_G \times V_H = \{(u, v) \mid u \in V_G \ \& \ v \in V_H\}, \\ E_{G \times H} &= E_G \times E_H = \{(x, y) \xrightarrow{(a,b)} (z, w) \mid x \xrightarrow{a} z \in E_G \ \& \ y \xrightarrow{b} w \in E_H\} \end{aligned}$$

つまり, 直積 グラフ $G \times H$ の頂点は, G の頂点 u と H の頂点 v の対 (u, v) であり, $G \times H$ の辺は, G の辺 a と H の辺 b の対 (a, b) である. 実際, これは グラフ の圏における 2 項積になっていることが確かめられる. グラフ と言ったが, つまり G と H は圏でよい. 特に, 圏 C に対して $C \times C$ を考えることができる.

対角関手 $\Delta = (\Delta_V, \Delta_E): C \rightarrow C \times C$ は, 頂点 $x \in V_C$ を頂点 $(x, x) \in V_{C \times C}$ に移し, 辺 $a \in E_C$ を $(a, a) \in E_{C \times C}$ に移す写像である:

$$\Delta_V(x) = (x, x), \quad \Delta_E(x \xrightarrow{a} y) = (x, x) \xrightarrow{(a,a)} (y, y).$$

対角関手 $\Delta: C \rightarrow C \times C$ の右随伴 $g: C \times C \rightarrow C$ が何であるかについて考察してみよう. 随伴の定義から, 任意の頂点 $x \in V_C$ と $(u, v) \in V_{C \times C}$ に対して, 以下の性質が成り立つはずである.

$$\frac{\Delta(x) \longrightarrow (u, v)}{x \longrightarrow g(u, v)}$$

特に, $x = g(u, v)$ とおくと, 下から上方向への推論において, 下式の辺 $g(u, v) \xrightarrow{1} g(u, v)$ は上式の辺 $\theta^{-1}(1) = (p_0, p_1): \Delta(g(u, v)) = (g(u, v), g(u, v)) \rightarrow (u, v)$ に変換される. $C \times C$ の辺 $(p_0, p_1): (g(u, v), g(u, v)) \rightarrow (u, v)$ は, 2つの C の辺 $g(u, v) \xrightarrow{p_0} u$ と $g(u, v) \xrightarrow{p_1} v$ に分離できる.

$$u \xleftarrow{p_0} g(u, v) \xrightarrow{p_1} v$$

一般に, 上式の辺 $\Delta(x) = (x, x) \xrightarrow{(a, b)} (u, v)$ は, $x \xrightarrow{a} u$ と $x \xrightarrow{b} v$ の2つの辺に分離できる. したがって, 上から下方向への推論は, 与えられた任意の辺 $x \xrightarrow{a} u$ と $x \xrightarrow{b} v$ に対して, ある辺 $x \xrightarrow{\theta(a, b)} g(u, v)$ が一意に対応する, ということを述べる.

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ a \swarrow & \theta(a, b) \downarrow & \searrow b \\ u \xleftarrow{p_0} & g(u, v) & \xrightarrow{p_1} v \end{array}$$

しかし, これは, $g(u, v)$ が $\bullet\bullet$ 型図 $\{u, v\}$ の極限, つまり直積 $u \times v$ であることに他ならない. したがって, 対角関手 Δ の右随伴が直積 \times であることが確かめられた. 特に, 対角関手 $\Delta: C \rightarrow C \times C$ が右随伴を持つことと, C が直積を持つことは同値である.

議論は同様であるが, 対角関手 $\Delta: C \rightarrow C \times C$ の左随伴 $f: C \times C \rightarrow C$ が何であるかについても考察してみよう. 随伴の定義から, 任意の頂点 $y \in V_C$ と $(u, v) \in V_{C \times C}$ に対して, 以下の性質が成り立つはずである.

$$\frac{f(u, v) \rightarrow y}{(u, v) \rightarrow \Delta(y)}$$

特に, $y = f(u, v)$ とおくと, 上から下方向への推論において, 上式の辺 $f(u, v) \xrightarrow{1} f(u, v)$ は下式の辺 $\theta(1) = (j_0, j_1): (u, v) \rightarrow \Delta(f(u, v)) = (f(u, v), f(u, v))$ に変換される. $C \times C$ の辺 $(j_0, j_1): (u, v) \rightarrow (f(u, v), f(u, v))$ は, 2つの C の辺 $u \xrightarrow{j_0} f(u, v)$ と $v \xrightarrow{j_1} f(u, v)$ に分離できる.

一般に, 下式の辺 $(u, v) \xrightarrow{(a, b)} \Delta(y) = (y, y)$ は, $u \xrightarrow{a} y$ と $v \xrightarrow{b} y$ の2つの辺に分離できる. したがって, 下から上方向への推論は, 与えられた任意の辺 $u \xrightarrow{a} y$ と $v \xrightarrow{b} y$ に対して, ある辺 $f(u, v) \xrightarrow{\theta^{-1}(a, b)} y$ が一意に対応する, ということを述べる.

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ a \swarrow & \theta^{-1}(a, b) \downarrow & \searrow b \\ u \xrightarrow{j_0} & g(u, v) & \xleftarrow{j_1} v \end{array}$$

しかし, これは, $f(u, v)$ が $\bullet\bullet$ 型図 $\{u, v\}$ の余極限, つまり直和 $u + v$ であることに他ならない. したがって, 対角関手 Δ の左随伴が直和 $+$ であることが確かめられた. 特に, 対角関手 $\Delta: C \rightarrow C \times C$ が左随伴を持つことと, C が直和を持つことは同値である.

(2) 極限, 余極限と対角関手の随伴: 対角関手は, C から $C \times C$ への関手であった. ところで, C における $\bullet\bullet$ 型図とは, 頂点の対のことであったから, $C \times C$ は C における $\bullet\bullet$ 型図の圏 $C^{\bullet\bullet}$ として見る事ができる. このアイデアを一般化すると, 任意のグラフ (圏) J に対して, J 型図の圏 C^J を得ることができる.

$$V_{C^J} = \{\delta: J \rightarrow C \mid \delta \text{ は グラフ 準同型 (関手)}\},$$

$$E_{C^J} = \{\delta \xrightarrow{\theta} \delta' \mid \theta: \delta \Rightarrow \delta' \text{ は自然変換}\}.$$

このとき, J 型の対角関手 $\Delta_J = ((\Delta_J)_V, (\Delta_J)_E): C \rightarrow C^J$ は, 大雑把に言えば, 頂点 $x \in V_C$ を頂点の族 (x, x, x, \dots) に移し, 辺 $e \in E_C$ を辺の族 (e, e, e, \dots) に移す. 厳密には, 次によって定義される.

1. まず, Δ_J は, 各頂点 $x \in V_C$ を定値写像 $\bar{x} = (\bar{x}_V, \bar{x}_E): J \rightarrow C$ に移す. ここで, 任意の $j \in V_J$ について $\bar{x}_V(j) = x$ であり, $j \xrightarrow{a} k \in E_J$ について $\bar{x}_E(j \xrightarrow{a} k) = x \xrightarrow{1_x} x$ である.
2. Δ_J は, 各辺 $x \xrightarrow{e} y \in E_C$ を自然変換 $\bar{e} = (\bar{e}_j)_{j \in J}: \bar{x} \Rightarrow \bar{y}$ に移す. ここで, 各成分 $\bar{e}_j: \bar{x}(j) = x \rightarrow \bar{y}(j) = y$ は, $\bar{e}_j = e$ によって定義される.

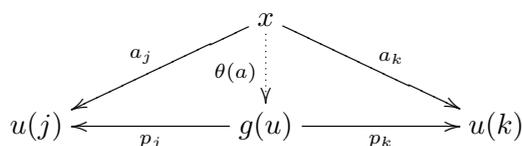
J 型の対角関手 $\Delta_J: C \rightarrow C^J$ の右随伴 $g: C^J \rightarrow C$ が何であるかについて考察してみよう. 随伴の定義から, C の任意の頂点 x と C^J の任意の頂点, すなわち J 型図 u に対して, 以下の性質が成り立つはずである.

$$\frac{\Delta_J(x) \longrightarrow u}{x \longrightarrow g(u)}$$

特に, $x = g(u)$ とおくと, 下から上方向への推論において, 下式の辺 $g(u) \xrightarrow{1} g(u)$ は上式の辺 $\theta^{-1}(1) = (p_j)_{j \in J}: \Delta_J(g(u)) = \overline{g(u)} \longrightarrow u$ に変換される. ここで, 上付きバーは, 先ほど定義したとおり, 対角関手の値である. この $\theta^{-1}(1)$ は C^J の辺, すなわち $\overline{g(u)}$ から u への自然変換であるから, 各 $j \xrightarrow{a} k \in E_J$ について, 以下が成立する.

$$\begin{array}{ccc} \overline{g(u)}(j) = g(u) & \xrightarrow{p_j} & u(j) \\ \overline{g(u)}(a) = 1_{g(u)} \parallel & & \downarrow u(a) \\ \overline{g(u)}(k) = g(u) & \xrightarrow{p_k} & u(k) \end{array}$$

つまり, これが述べることは, $(g(u), p_j)_{j \in J}$ が J 型図 u 上の錘であるということである. 上の議論を分析すれば, 一般に, 辺 $\Delta(x) \xrightarrow{a} u$ とは, J 型図 u 上の錘 $(x, a_j)_{j \in J}$ に他ならないことが分かる. したがって, 上から下方向への推論は, J 型図 u 上の任意の錘 $(x, a_j)_{j \in J}$ に対して, ある辺 $x \xrightarrow{\theta(a)} g(u)$ が一意に対応する, ということを述べる.



しかし、これは、 $g(u)$ が J 型図 u の極限 $\lim_J(u)$ であることに他ならない。したがって、 J 型対角関手 Δ_J の右随伴が極限 \lim_J であることが確かめられた。特に、対角関手 $\Delta_J: C \rightarrow C^J$ が右随伴を持つことと、 C が J 型図の極限を持つことは同値である。

余極限についての議論は同様なので省略する。

(3) 直積空間と関数空間の随伴: ハイティング代数のハッセ図においては、「かつ」と「ならば」が随伴の関係 $- \wedge z \dashv z \Rightarrow -$ にあるというのは先に述べたとおりである。われわれは既に「かつ」とは 2 項積 \times のことだと知っている。Set においては、その右随伴は関数の集合である。

$$C(X \times Z, Y) \simeq C(X, Y^Z).$$

上記について、 $g: X \times Z \rightarrow Y$ が与えられたとき、 $\lambda_g: X \rightarrow Y^Z$ を $\lambda_g(x)(z) = g(x, z)$ として定義すればよい。逆に、 $h: X \rightarrow Y^Z$ が与えられたら、 $u_h: X \times Z \rightarrow Y$ を $u_h(x, z) = h(x)(z)$ と定義すればよい。これは明らかに一対一対応である。しばしば λ_g を g のカーリー化 (currying) といい、 u_h を h の非カーリー化 (uncurrying) という。もう少し詳細を見てみると、

$$\frac{X \times Z \longrightarrow Y}{X \longrightarrow Y^Z}$$

となっているが、 $X = Y^Z$ とおくと、下式の辺 $Y^Z \xrightarrow{1} Y^Z$ に上式の辺 $\theta^{-1}(1) = \text{eval}: Y^Z \times Z \rightarrow Y$ が対応する。Set においては、 $f \in Y^Z$ について、 $\text{eval}(f, z) = f(z)$ となる。つまり、関数 f と入力 z を受け取って、その出力 $f(z)$ を評価する。このため、eval は評価写像と呼ばれる。以上を図式的にまとめると、任意の $X \times Z \xrightarrow{g} Y$ に対して、以下が成立する。

$$\begin{array}{ccc} X & & X \times Z \\ \lambda_g \downarrow \text{dotted} & & \lambda_g \times 1_Z \downarrow \\ Y^Z & & Y^Z \times Z \xrightarrow{\text{eval}} Z \\ & & \nearrow g \end{array}$$

一般に、このような性質を持つ (Y^Z, eval) を指数対象 (exponential object) と呼ぶ。つまり、2 項積を持つ圏 C における頂点 Y, Z について、 (Y^Z, eval) が指数対象であるとは、 C の任意の頂点 X と辺 $X \times Z \xrightarrow{g} Y$ に対して、上の図式を可換にする λ_g が一意に存在することである。2 項積と指数対象を持つ圏は、デカルト閉 (cartesian closed) と呼ばれる。

(4) 述語論理における随伴: さて、論理的には、ここまでで「かつ」「または」「ならば」を取り扱えたことになる。恒真式 (終対象) \top と恒偽式 (始対象) \perp もあったので、否定 $\neg A := A \rightarrow \perp$ も取り扱える。そういえば、項の代入もプルバックとして取り扱えた (第 2.1 節のプルバックの項目を参照)。さて、論理学を行うに当たって、また何か足りないものはあるだろうか。その答えは、というと量化記号 \forall と \exists がまだ足りていない。

それでは、量化記号を随伴として導入できることを述べよう。随伴の記号と混同しないように注意しておくと、以下では、 $A \vdash B$ は「 A を仮定すると B を証明できる」ということを表す記号であるとす。また、変数 x の走る範囲 X を明示し、 $x: X$ のように書くことにする。現在、考えて

いる自由変数とその型（変数の走る領域）を指定したもののリストはコンテキスト（*context*）と呼ばれる。

さて、述語論理において、存在量化に関する以下の上下双方向の規則が成立する。

$$\frac{\varphi(x, y) \vdash \theta(y) \quad \text{in context } x:X, y:Y}{\exists x:X. \varphi(x, y) \vdash \theta(y) \quad \text{in context } y:Y}$$

注意しておくとして、上式では θ は 2 項論理式であると考えている。つまり、 (x, y) を受け取った後に x を捨てて $\theta(y)$ を取り扱っている。数学的に厳密には、 $\pi(x, y) = y$ となる π を取れば、

$$\frac{\varphi(x, y) \vdash \theta(\pi(x, y)) \quad \text{in context } x:X, y:Y}{\exists x:X. \varphi(x, y) \vdash \theta(y) \quad \text{in context } y:Y}$$

ということである。論理式の項 t の代入について思い出すと、これは引き戻し $t^*: \theta(y) \mapsto \theta(t(\bar{x}))$ によって与えられていた。つまり、

$$\frac{\varphi(x, y) \vdash \pi^*(\theta(y)) \quad \text{in context } x:X, y:Y}{\exists x:X. \varphi(x, y) \vdash \theta(y) \quad \text{in context } y:Y}$$

したがって、 $\exists_X: \varphi(x, y) \mapsto \exists x:X. \varphi(x, y)$ を考えれば、存在量化 \exists_X が π^* の随伴であることがわかった。つまり、 $\exists_X \dashv \pi^*$ ということである。集合算を用いてこの随伴を理解すると、以下のようになっている。

$$\frac{\{(x, y) : \varphi(x, y)\} \subseteq \pi^{-1}\{y : \theta(y)\} = \{(x, y) : \theta(y)\}}{\{y : \exists x:X. \varphi(x, y)\} \subseteq \{y : \theta(y)\}}$$

同様にして、全称量化に関する以下の上下双方向の規則が成立する。

$$\frac{\psi(y) \vdash \varphi(x, y) \quad \text{in context } x:X, y:Y}{\psi(y) \vdash \forall x:X. \varphi(x, y) \quad \text{in context } y:Y}$$

先程と同様に、上式の $\psi(y)$ は 2 項論理式であると考えている。つまり、ふたたび π の引き戻し π^* を用いれば、次のように表すことができる。

$$\frac{\pi^*(\psi(y)) \vdash \varphi(x, y) \quad \text{in context } x:X, y:Y}{\psi(y) \vdash \forall x:X. \varphi(x, y) \quad \text{in context } y:Y}$$

つまり、全称量化 $\forall_X: \varphi(x, y) \mapsto \forall x:X. \varphi(x, y)$ が π^* の右随伴になっている。記号的に書けば、 $\pi^* \dashv \forall_X$ である。

5.4. 単位，余単位，モナド

随伴の単位：関手 $f: C \rightarrow D$ と $g: D \rightarrow C$ が随伴 $f \dashv g$ の関係にあるとき、特に、 $y = f(x)$ を考えると次の関係が成立する。

$$\frac{f(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{in } D}{x \longrightarrow gf(x) \quad \text{in } C}$$

周囲の辺も明示すれば、たとえば以下の関係も成立している。

$$\frac{f(x) \xrightarrow{1_{f(x)}} f(x) \longrightarrow f(x) \xrightarrow{b} y \quad \text{in } D}{x \xrightarrow{1_x} x \longrightarrow gf(x) \xrightarrow{g(b)} g(y) \quad \text{in } C}$$

特に上式の中央の辺も $1_{f(x)}: f(x) \rightarrow f(x)$ として取れば、下式の中央の辺は $\eta_x := \theta_{x, f(x)}(1_{f(x)})$ となる。辺 η_x の始点と終点を明示的に書けば、 $x \xrightarrow{\eta_x} gf(x)$ である。この自然変換 $\eta = (\eta_x)_{x \in V_C}: 1_C \Rightarrow g \circ f$ は、随伴 $f \dashv g$ の単位 (unit) と呼ばれる。さて、上に述べた関係において、自明な恒等辺を取り除いてしまえば、これは以下の図式が成り立つことを意味する。

$$\begin{array}{ccc} f(x) & & x \xrightarrow{\eta_x} gf(x) \\ \downarrow b & & \searrow \theta_{xy}(b) \\ y & & g(y) \end{array}$$

ところで θ_{xy} は全単射であったから、右図から左図の方向を考えると、任意の辺 $x \xrightarrow{a} g(y)$ に対して、下図を満たす唯一の辺 $b = \theta_{xy}^{-1}(a): f(x) \rightarrow y$ が存在するということでもある。

$$\begin{array}{ccc} f(x) & & x \xrightarrow{\eta_x} gf(x) \\ \vdots b & & \searrow a \\ y & & g(y) \end{array}$$

言い換えれば、 $(f(x), \eta_x)$ は x から g への普遍射である。これを利用すると、随伴 $f \dashv g$ は単位 η の情報のみから復元できる。具体的には、 D の辺 $f(x) \xrightarrow{p} y$ に対して、 $\theta_{xy}(p) := g(p) \circ \eta_x$ と定義すればよい。

随伴の余単位: 今度は、随伴 $f \dashv g$ において、 $x = g(y)$ の場合を考えよう。

$$\frac{fg(y) \longrightarrow y \quad \text{in } D}{g(y) \longrightarrow g(y) \quad \text{in } C}$$

周囲の辺も明示すれば、たとえば以下の関係も成立している。

$$\frac{f(x) \xrightarrow{f(a)} fg(y) \longrightarrow y \xrightarrow{1_y} y \quad \text{in } D}{x \xrightarrow{a} g(y) \longrightarrow g(y) \xrightarrow{1_{g(y)}} g(y) \quad \text{in } C}$$

特に下式の中央の辺も $1_{g(x)}: g(x) \rightarrow g(x)$ として取れば、上式の中央の辺は $\varepsilon_y := \theta_{g(y), y}^{-1}(1_{g(x)})$ となる。辺 ε_y の始点と終点を明示的に書けば、 $fg(y) \xrightarrow{\varepsilon_y} y$ である。この自然変換 $\varepsilon = (\varepsilon_y)_{y \in V_D}: f \circ g \Rightarrow 1_D$ は、随伴 $f \dashv g$ の余単位 (counit) と呼ばれる。さて、上に述べた関係

において，自明な恒等辺を取り除いてしまえば，これは以下の図式が成り立つことを意味する．

$$\begin{array}{ccc}
 x & & f(x) \xrightarrow{f(a)} fg(y) \\
 \downarrow a & & \searrow \theta_{xy}^{-1}(a) \quad \downarrow \varepsilon_y \\
 g(y) & & y
 \end{array}$$

ところで θ_{xy} は全単射であったから，右図から左図の方向を考えると，任意の辺 $f(x) \xrightarrow{b} y$ に対して，下図を満たす唯一の辺 $a = \theta_{xy}(b): x \rightarrow g(y)$ が存在するということでもある．

$$\begin{array}{ccc}
 x & & f(x) \xrightarrow{f(a)} fg(y) \\
 \vdots \downarrow a & & \searrow b \quad \downarrow \varepsilon_y \\
 g(y) & & y
 \end{array}$$

それでは，随伴関係とモナドの繋がりについて説明しよう．まず，命題 5.2 およびその後の議論により，等式理論（ローヴェア理論）の自由関手 F_L と忘却関手 U_L は随伴関係 $F_L \dashv U_L$ をなす．そして，第 4.5 節で見たように，自由関手 F_L と忘却関手 U_L の対から常にモナド $T = U_L F_L$ を得ることができる．しかし，自由関手と忘却関手の対という特殊な随伴関係からだけでなく，実を言えば，いかなる随伴関係からは必ずモナドを得ることができるのである．これを今から証明していこう．

定理 5.7. 関手 $f: C \rightarrow D$ と $g: D \rightarrow C$ が随伴 $f \dashv g$ の関係にあるとする．いま， η と ε を随伴 $f \dashv g$ の単位と余単位としたとき，以下を考える．

$$T = gf, \quad \mu_x = g(\varepsilon_{f(x)}).$$

このとき， (T, μ, η) は C 上のモナドである．

Proof. まず， T が C 上の自己関手であることは明らかである．随伴の定義より，いま，自然同型 $\theta_{xy}: D(f(x), y) \simeq C(x, g(y))$ が存在している．また，単位と余単位の定義より， $\eta_x = \theta_{x, f(x)}(1_{f(x)})$ かつ $\varepsilon_y = \theta_{g(y), y}^{-1}(1_{g(y)})$ である

$$\frac{f(x) \xrightarrow{1} f(x)}{x \xrightarrow{\eta_x} gf(x)} \qquad \frac{fg(y) \xrightarrow{\varepsilon_y} g(y)}{g(y) \xrightarrow{1} g(y)}$$

から，これらも自然変換である．モナド結合律と単位律を示すために，いくつかの準備をする．

まず， D の任意の辺 $f(x) \xrightarrow{e} y$ に対して， $g(e) \circ \eta_x = \theta_{xy}(e)$ である．これはなぜなら，

$$\frac{f(x) \xrightarrow{1} f(x) \xrightarrow{1} f(x) \xrightarrow{e} y}{x \xrightarrow{1} x \xrightarrow{\eta_x} gf(x) \xrightarrow{g(e)} g(y)}$$

であるが，上辺の全体を θ_{xy} で変換したものが下辺の全体となっているはずであることから従う．同様に， C の任意の辺 $x \xrightarrow{e} g(y)$ に対しても， $\varepsilon_y \circ f(e) = \theta_{xy}^{-1}(e)$ となる．これについては，

$$\frac{f(x) \xrightarrow{f(e)} fg(y) \xrightarrow{\varepsilon_y} y \xrightarrow{1} y}{x \xrightarrow{e} g(y) \xrightarrow{1} g(y) \xrightarrow{1} g(y)}$$

の下辺の全体を θ_{xy}^{-1} で変換したものが上辺の全体になっていることから従う．以上より，いま，証明に必要な 4 つの等式が得られた：

$$\theta_{x, f(x)}^{-1}(\eta_x) = 1_{f(x)}, \quad \theta_{g(y), y}(\varepsilon_y) = 1_{g(y)}, \quad g(e) \circ \eta_x = \theta_{xy}(e), \quad \varepsilon_y \circ f(e) = \theta_{xy}^{-1}(e).$$

証明の流れを分かりやすくするために，添字を省略した以下のような略記も利用する．

$$\theta^{-1}(\eta) = 1, \quad \theta(\varepsilon) = 1, \quad g(e) \circ \eta = \theta(e), \quad \varepsilon \circ f(e) = \theta^{-1}(e). \quad (3)$$

これはあくまで略記であることに注意する．さて，モノド結合律と単位律を示そう．まず， $T = gf$ であったことを思い出せば，モノド単位律については，以下を示せばよい．

$$\begin{array}{ccc} gf(x) & \xrightarrow{\eta_{gf(x)}} & gfgf(x) \xleftarrow{gf(\eta_x)} gf(x) \\ & \searrow 1_{gf(x)} & \downarrow \mu_x \\ & & gf(x) \end{array}$$

定義より， $\mu_x = g(\varepsilon_{f(x)})$ であった．添字を省略すれば $\mu = g(\varepsilon)$ である．まずは添字を省略して議論すれば，まず，左の三角形については，等式 (3) のうち 2, 3 番目を利用すると

$$\mu \circ \eta = g(\varepsilon) \circ \eta = \theta(\varepsilon) = 1$$

となる．右の三角形については，等式 (3) の 1, 4 番目と g が関手であることを利用すると

$$\mu \circ gf(\eta) = g(\varepsilon) \circ gf(\eta) = g(\varepsilon \circ f(\eta)) = g(\theta^{-1}(\eta)) = g(1) = 1$$

を得られる．添字を明示化した厳密な証明については，読者の演習問題としよう．つづいて，モノド結合律を示す．

$$\begin{array}{ccc} gfgfgf(x) & \xrightarrow{gf(\mu_x)} & gfgf(x) \\ \mu_{g f(x)} \downarrow & & \downarrow \mu_x \\ gfgf(x) & \xrightarrow{\mu_x} & gf(x) \end{array}$$

これも添字を省略して議論すると，等式 (3) の 4 番目と g が関手であることを利用すれば，時計回りのパスと反時計回りのパスは以下のように式変形できる．

$$\begin{aligned} \mu \circ gf(\mu) &= g(\varepsilon) \circ gfg(\varepsilon) = g(\varepsilon \circ fg(\varepsilon)) = g(\theta^{-1}(g(\varepsilon))), \\ \mu \circ \mu &= g(\varepsilon) \circ g(\varepsilon) = g(\varepsilon \circ \varepsilon). \end{aligned}$$

この2つの式が等しければ、上図は可換である、つまりモナド単位律が従う。よって、 $\varepsilon \circ \varepsilon = \theta^{-1}(g(\varepsilon))$ であることを示せば十分である。つまり、 $\theta(\varepsilon \circ \varepsilon) = g(\varepsilon)$ を示せばよい。これについては、等式(3)の2,3番目を利用した等式変形から導かれる。

$$\theta(\varepsilon \circ \varepsilon) = g(\varepsilon \circ \varepsilon) \circ \eta = g(\varepsilon) \circ g(\varepsilon) \circ \eta = g(\varepsilon) \circ \theta(\varepsilon) = g(\varepsilon \circ 1) = g(\varepsilon).$$

したがって、 (T, μ, η) がモナドであることが示された。

以下、念の為、モナド結合律の証明における3つの等式変形について、添字を省略しない厳密なものを書いておくことにする。

$$\begin{aligned} \mu_x \circ gf(\mu_x) &= g(\varepsilon_{f(x)}) \circ gfg(\varepsilon_{f(x)}) = g(\varepsilon_{f(x)} \circ fg(\varepsilon_{f(x)})) = g\left(\theta_{gfgf(x), f(x)}^{-1}(g(\varepsilon_{f(x)}))\right), \\ \mu_x \circ \mu_{gf(x)} &= g(\varepsilon_{f(x)}) \circ g(\varepsilon_{fgf(x)}) = g(\varepsilon_{f(x)} \circ \varepsilon_{fgf(x)}). \end{aligned}$$

よって、 $\theta_{gfgf(x), f(x)}(\varepsilon_{f(x)} \circ \varepsilon_{fgf(x)}) = g(\varepsilon_{f(x)})$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} \theta_{gfgf(x), f(x)}(\varepsilon_{f(x)} \circ \varepsilon_{fgf(x)}) &= g(\varepsilon_{f(x)} \circ \varepsilon_{fgf(x)}) \circ \eta_{gfgf(x)} = g(\varepsilon_{f(x)}) \circ g(\varepsilon_{fgf(x)}) \circ \eta_{gfgf(x)} \\ &= g(\varepsilon_{f(x)}) \circ \theta_{gfgf(x), f(x)}(\varepsilon_{fgf(x)}) = g(\varepsilon_{f(x)}) \circ 1_{gfgf(x)} = g(\varepsilon_{f(x)}). \end{aligned}$$

このように、添字が極めて繁雑になることがわかる。しかし、ともあれ定理は厳密に示された。□

§ 6. アイレンベルグ-ムーア代数

定理 5.7 では、任意の随伴からモナドを得られることを見た。本節では、すべてのモナドは随伴から得られることを示す。実際、ありとあらゆるモナドは、自由関手と忘却関手の随伴から得られる。つまり、文脈の拡大(モナド)とはつまり言語の拡張・構造の賦与(自由構成)である、というこの形式的証明がついに与えられる。

これを示すためには、まず適切な自由関手の概念を定めなければならないが、自由関手とは、何らかの代数的理論およびモデルの概念に付随するものと思われる。しかし、これについて、等式理論(ローヴェア理論)では力不足である。定理 4.32 で見たように、ローヴェア理論には、あくまで Set 上の有限的モナドしか作ることができない。ローヴェア理論を強化して、無限和 \sum や無限積 \prod などの無限項演算を扱うことが可能なシステムを作ることにはできるが、それで表されるものは Set 上のモナドだけである。

まず、そもそも等式公理という発想をしている限りは、答えには行き着かない。たとえば、等式公理 " $s = t$ " 以外に、順序公理 " $s \leq t$ " を取り扱ってもよいはずである。その自由モデルを考えることによって、半順序と単調写像の圏 Pos 上のモナドを得られるであろう。もちろん、等式公理や順序公理以外にも無数のタイプの公理があり得る。このような“構造の賦与”の方法の可能性をすべて書き尽くしたとき、はじめてモナドの総体というものを捉えることができるだろう。

6.1. モナドのモデル理論

それでは、形式的な議論に進もう。数理論理学において、言語 \mathcal{L} の構造 M とは、領域である集合 A と各記号 $f \in \mathcal{L}$ の解釈 $f^M: A \rightarrow A$ の集まり $M = (A, -^M)$ のことであった。数理論理学に

においては、領域の各元 $c \in A$ 毎に定数記号 $\langle c \rangle$ を言語に加えて議論を行う、ということも標準的に行われる（第 3.1 節では、 $\langle c \rangle$ ではなく \check{c} という記号を用いていた）。このように領域の元と定数記号を同一視してしまえば、言語 $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{\langle c \rangle : c \in A\}$ の項 t について、解釈 t^M が自動的に得られる。ここで、定数記号 $\langle c \rangle$ の解釈は、常に $\langle c \rangle^M = c$ であるとする。また、項の解釈は定義 3.7 のように記号の解釈から自動的に得られたことを思い出そう：

$$f(t_0, t_1, \dots, t_n)^M(\bar{x}) := f^M(t_0^M(\bar{x}), t_1^M(\bar{x}), \dots, t_n^M(\bar{x})).$$

領域が A であるから、任意の \mathcal{L}_A -閉項 t の解釈について、 $t^M \in A$ となっていることに注意する。いま、いつ \mathcal{L} -構造 M が等式理論 T のモデルとなるかについて考察しよう。 \mathcal{L} -構造 M が T のモデルであるということは、任意の \mathcal{L}_A -閉項 s, t について

$$s \approx_T t \implies s^M = t^M \quad (4)$$

を満たすことである。ところで、 \mathcal{L}_A -閉項全体の集合を合同関係 \approx_T で割ったものが自由代数の台集合 $T(A) = U_T F_T(A)$ であったことを思い出そう（定義 3.10 および第 4.5 節）。

$$T(A) = \{[t] : t \text{ は } \mathcal{L}_A \text{ の閉項}\}.$$

ここで、 $[t]$ を項 t の \approx_T -同値類である。すると、 M が T のモデルであるという式 (4) は、項の解釈 $-^M$ が、矛盾なく写像 $[-^M]: T(A) \rightarrow A$ を誘導する、ということである。具体的には、 $s \approx_T t$ とは $[s] = [t]$ ということであるから、

$$[-^M]([t]) = t^M$$

という写像が矛盾なく定義される。少し記号の濫用となるが、 $[-^M]$ のことも $-^M$ と書いてしまうことにする。そして、これからは等式理論 T のモデルを写像 $-^M: T(A) \rightarrow A$ であると考えことにしよう。ただし、写像 $-^M: T(A) \rightarrow A$ は解釈から誘導されているものであるから、以下の条件を満たしている。

(M1) 任意の \mathcal{L}_A -閉項 $f(t_0, t_1, \dots, t_n)$ に対して、

$$f(t_0, t_1, \dots, t_n)^M = f(\langle t_0^M \rangle, \langle t_1^M \rangle, \dots, \langle t_n^M \rangle)^M. \quad (5)$$

(M2) 任意の $a \in A$ に対して、定数記号 $\langle a \rangle$ の解釈は、 $\langle a \rangle^M = a$ となる。

等式 (5) について説明しておく、先ほど説明した定義 3.7 および定数記号の解釈 $\langle c \rangle^M = c$ を用いれば、以下が成立することがわかる。

$$f(t_0, t_1, \dots, t_n)^M = f^M(t_0^M, t_1^M, \dots, t_n^M) = f(\langle t_0^M \rangle, \langle t_1^M \rangle, \dots, \langle t_n^M \rangle)^M.$$

いま、等式理論 T の自由代数は次によってモナド (T, μ, η) とみなせたことを思い出そう。

- 写像 $r: A \rightarrow B$ について、 $T(r): T(A) \rightarrow T(B)$ は、項 $t \in T(A)$ に現れるすべての定数 $a \in A$ を $r(a) \in B$ に置換したものである。ここで、項 t において定数 $a \in A$ は常に定数記号 $\langle a \rangle$ の形で現れていることに注意する。

- 項 $t_0, \dots, t_n \in T(A)$ が与えられているとき, $\mu_A(s(\langle t_0 \rangle, \dots, \langle t_n \rangle)) = s(t_0, \dots, t_n)$ である .
- 単位 $\eta_A: A \rightarrow T(A)$ は, $\eta_A(a) = \langle a \rangle$ によって与えられている .

すると, T のモデルであることの条件 (M1) は, 任意の \mathcal{L}_A -閉項 t_0, t_1, \dots, t_n に対して, 以下のような図式として書き表せる .

$$\begin{array}{ccc}
 f(\langle t_0 \rangle, \langle t_1 \rangle, \dots, \langle t_n \rangle) & \xrightarrow{T(-^M)} & f(\langle t_0^M \rangle, \langle t_1^M \rangle, \dots, \langle t_n^M \rangle) \\
 \downarrow \mu_A & & \downarrow -^M \\
 & & f(\langle t_0^M \rangle, \langle t_1^M \rangle, \dots, \langle t_n^M \rangle)^M \\
 & & \parallel \text{等式 (5)} \\
 f(t_0, t_1, \dots, t_n) & \xrightarrow{-^M} & f(t_0, t_1, \dots, t_n)^M
 \end{array}$$

モデルの条件 (M2) については, 以下の通りである .

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\eta_A} & \langle a \rangle \\
 \searrow 1_A & & \downarrow -^M \\
 & & a = \langle a \rangle^M
 \end{array}$$

以上をまとめ, 上図の背後にある図式を明示化すると, 以下を得る .

命題 6.1. 等式理論 T のモデルとは, 集合 A と写像 $-^M: T(A) \rightarrow A$ の対 $(A, -^M)$ であり, 以下の図式を可換にするものである .

$$\begin{array}{ccc}
 T(T(A)) & \xrightarrow{T(-^M)} & T(A) \\
 \mu_A \downarrow & & \downarrow -^M \\
 T(A) & \xrightarrow{-^M} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\
 \searrow 1_A & & \downarrow -^M \\
 & & A
 \end{array}$$

もちろん, これはローヴェア理論についても同様である . そして, 上の定義を分析してみると, 等式理論のモデル概念は, 明らかに任意のモナドに拡張可能である . したがって, 一般に, モナドのモデル理論をある意味で展開できる .

定義 6.2. (T, μ, η) を圏 C 上のモナドとする . このとき, T 上のアイレンベルグ-ムーア代数 (Eilenberg-Moore algebra) とは, C の頂点 A と辺 $T(A) \xrightarrow{e} A$ の対 (A, e) であり, 以下の図式

を可換にするものである．

$$\begin{array}{ccc}
 T(T(A)) & \xrightarrow{T(e)} & T(A) \\
 \mu_A \downarrow & & \downarrow e \\
 T(A) & \xrightarrow{e} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\
 & \searrow 1_A & \downarrow e \\
 & & A
 \end{array}$$

アイレンベルグ-ムーア代数と呼ぶと長いので，通常は短縮して， T -代数 (T -algebra) と呼ぶ．あるいは，混乱を避けるために，モナド代数と呼ぶこともある．

もし (T, μ, η) が圏 C 上のモナドならば，圏 C の任意の頂点 x について $T(x)$ と $TT(x) \xrightarrow{\mu_x} T(x)$ の対は T -代数となる．なぜなら，モナドの定義式 (定義 4.19) から，以下が得られる．

$$\begin{array}{ccc}
 TTT(x) & \xrightarrow{T(\mu_x)} & TT(x) \\
 \mu_{T(x)} \downarrow & & \downarrow \mu_x \\
 TT(x) & \xrightarrow{\mu_x} & T(x)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T(x) & \xrightarrow{\eta_{T(x)}} & TT(x) \\
 & \searrow 1_{T(x)} & \downarrow \mu_x \\
 & & T(x)
 \end{array}$$

ここで，左図はモナド結合律，右図はモナド単位律の左三角形である．しかし，このモナド結合律とモナド単位律は， T -代数の定義式の (A, e) を $(T(x), \mu_x)$ に置換したものに他ならない．したがって， $(T(x), \mu_x)$ は必ず T -代数となる．

定義 6.3. (T, μ, η) を C 上のモナドとする．このとき， C の頂点 x に対して，対 $(T(x), \mu_x)$ を x の生成する自由 T -代数 (*free T -algebra*) と呼ぶ．

さて， T -代数の概念が導入されたら，次に考えることは， T -代数の射とは何たるか，であろう．これもまた，古典的な数理論理学において， \mathcal{L} -構造の間の準同型とは何であったかを思い出せばよい．たとえばモノイド準同型とは $h(x *_M y) = h(x) *_N h(y)$ を満たすものであったが，このように関数記号 $*$ に対する保存性を持つものである．一般に， \mathcal{L} -構造 $M = (A, -^M)$ と $N = (B, -^N)$ の間の準同型とは，写像 $h: A \rightarrow B$ であって，任意の関数記号 $f \in \mathcal{L}$ に対して，以下の条件を満たすものであった (定義 3.12)．

$$h(f^M(x_0, x_1, \dots, x_n)) = f^N(h(x_0), h(x_1), \dots, h(x_n)).$$

この変数 x_i に定数記号 $\langle a_i \rangle$ を代入してみよう．項の解釈の定義 3.7 より，以下の等式を得る．

$$\begin{aligned}
 h(f(\langle a_0 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle)^M) &= h(f^M(\langle a_0 \rangle^M, \dots, \langle a_n \rangle^N)) = h(f^M(a_0, \dots, a_n)) \\
 &= f^N(h(a_0), \dots, h(a_n)) = f^N(\langle h(a_0) \rangle^N, \dots, \langle h(a_n) \rangle^N) = f(\langle h(a_0) \rangle, \dots, \langle h(a_n) \rangle)^N. \quad (6)
 \end{aligned}$$

ここで，1 行目最後の項と 2 行目最初の項の間の等号は， h が準同型であることの定義より従う．

この等式 (6) を再び図式的に表せば、以下のようになっている。

$$\begin{array}{ccc}
 f(\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle) & \xrightarrow{T(h)} & f(\langle h(a_0) \rangle, \langle h(a_1) \rangle, \dots, \langle h(a_n) \rangle) \\
 \downarrow -^M & & \downarrow -^N \\
 f(\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle)^M & \xrightarrow{h} & h(f(\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \dots, \langle a_n \rangle)^M) \\
 & & \parallel \text{等式 (6)}
 \end{array}$$

背後にある図式を明示的に表すと、構造 $(A, -^M)$ から $(B, -^N)$ への準同型とは、以下の図式を可換にするような $h: A \rightarrow B$ であると言える。

$$\begin{array}{ccc}
 T(A) & \xrightarrow{T(h)} & T(B) \\
 \downarrow -^M & & \downarrow -^N \\
 A & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}$$

これで、モナド上の代数の間の射の概念をどう定義するかは明らかであろう。

定義 6.4. (T, μ, η) を圏 C 上のモナドとする。このとき、 T -代数 (A, e) から (B, e') への T -射 (T -morphism) とは、以下の図式を可換にする辺 $A \xrightarrow{h} B$ である。

$$\begin{array}{ccc}
 T(A) & \xrightarrow{T(h)} & T(B) \\
 e \downarrow & & \downarrow e' \\
 A & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}$$

T -代数を頂点とし T -射を辺とする圏は、 T のアイレンベルグ-ムーア圏 (Eilenberg-Moore category) と呼ばれ、 C^T と書かれる。

以上をまとめると、等式理論に関する諸概念は、以下のよう一般のモナドに拡張される。

等式理論 T のモデル	$\xrightarrow{\text{一般化}}$	モナド T 上の代数 (T -代数)
T のモデルの間の準同型	$\xrightarrow{\text{一般化}}$	T -代数の間の T -射

こうして、等式理論のモデル理論は任意のモナドのモデル理論へと一般化された。

6.2. 自由代数, 随伴, そしてモナド

さて, 等式理論の最も単純なモデルとして自由代数というものがあった. そして, モナド上の代数についても同様に, 自由代数というものを定義した. いま, モナド上の代数の圏, つまりアインベルグ-ムーア圏が与えられたから, 自由代数という単独のオブジェクトではなく, 自由代数の構成という関手について議論することができる. 前に見たように, 等式理論において, 自由代数の構成 (自由関手) には, 代数構造を忘れる関手 (忘却関手) が付随しており, 随伴関係をなす. この随伴関係が, モナド上の代数についても同様に成立することを示そう. そして, すべてのモナドは, 自由関手と忘却関手の随伴関係から復元できることを結論付ける. このために, まずはモナド上の代数に関する忘却関手と自由関手の定義を与える.

忘却関手 $U^T: C^T \rightarrow C$ は以下によって定義される.

1. 各 T -代数 (A, a) に対して, $U^T(A, a) = A$ として定義される.
2. 各 T -射 $f: (A, a) \rightarrow (B, b)$ について, $U^T(f) = f: A \rightarrow B$ として定義する.

自由関手 $F^T: C \rightarrow C^T$ は以下によって定義される.

1. $F^T(A)$ を A の生成する自由 T -代数 $(T(A), \mu_A)$ として定義する. ここで, (T, μ, η) がモナドならば, $(T(A), \mu_A)$ は T -代数であった (定義 6.3).
2. 各辺 $h: A \rightarrow B$ に対して, $F^T(h) = T(h): T(A) \rightarrow T(B)$ と定義すると, これは T -射になっている. なぜなら, $\mu: TT \Rightarrow T$ は自然変換であるから, 以下の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccc} TT(A) & \xrightarrow{T(h)} & TT(B) \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow \mu_B \\ T(A) & \xrightarrow{T(h)} & T(B) \end{array}$$

この図式は, $T(h): T(A) \rightarrow T(B)$ が T -射であることの定義式 (定義 6.4) である.

定理 6.5. (T, μ, η) を圏 C 上のモナドとする. このとき, 自由関手 $F^T: C \rightarrow C^T$ は, 忘却関手 $U^T: C^T \rightarrow C$ の左随伴である. さらに, 随伴 $F^T \dashv U^T$ から定理 5.7 の方法で得たモナドは, 元のモナド (T, μ, η) と等しい.

Proof. 自然同型 $C^T(F(A), (B, e)) = C^T((T(A), \mu_A), (B, e)) \simeq C(A, U(B, e)) = C(A, B)$ が存在することを示したい. いま, θ と $\bar{\theta}$ を以下のように定義する: T -射 $h: (T(A), \mu_A) \rightarrow (B, e)$ と辺 $p: A \rightarrow B$ に対して,

$$\theta_{A, (B, e)}(h) = h \circ \eta_A, \quad \bar{\theta}_{A, (B, e)}(p) = e \circ T(p).$$

まず, この $\theta: C^T(F(-), -) \Rightarrow C(-, U(-))$ および $\bar{\theta}: C(-, U(-)) \Rightarrow C^T(F(-), -)$ が自然

変換であることを確かめよう．このために，以下の式について考察する．

$$\frac{(T(X), \mu_X) \xrightarrow{T(s)} (T(A), \mu_A) \longrightarrow (B, e) \xrightarrow{t} (Y, e')}{X \xrightarrow{s} A \longrightarrow B \xrightarrow{t} Y}$$

まず， θ は上から下へ向かうが， $\eta: 1_C \Rightarrow T$ が自然変換であることから，以下は可換になる．

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) & \xrightarrow{h} & (B, e) \\ \uparrow s & & \uparrow T(s) & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{\eta_X} & T(X) & \longrightarrow & (Y, e') \end{array}$$

したがって，上式中央の辺 h だけを $\theta_{A,(B,e)}(h) = h \circ \eta_A$ に変換して下式を導いたもの (X から (Y, e') に向かう外回りルート) と上式全体を $\theta_{X,(Y,e')}$ で変換して下式を導いたもの (中央の辺を通るルート) は一致する．よって， θ は自然変換である．

つづいて， θ^- は下から上へ向かうが，上式の条件より $t: B \rightarrow Y$ が T -射として与えられていることから，以下は可換になる．

$$\begin{array}{ccccc} T(A) & \xrightarrow{T(p)} & T(B) & \xrightarrow{e} & B \\ \uparrow T(s) & & \downarrow T(t) & & \downarrow t \\ T(X) & \longrightarrow & T(Y) & \xrightarrow{e'} & Y \end{array}$$

したがって，下式中央の辺 p だけを $\theta_{A,(B,e)}^-(p) = e \circ T(p)$ で変換して下式を導いたもの ($T(X)$ から Y に向かう外回りルート) と下式全体を $\theta_{X,(Y,e')}^-$ で変換して下式を導いたもの (中央の辺を通るルート) は一致する．よって， θ^- もまた自然変換である．

残るは同型性，つまり $\theta_{A,(B,e)}^- = \theta_{A,(B,e)}^{-1}$ であることを示せばよい．以下， $\theta = \theta_{A,(B,e)}$ および $\theta^- = \theta_{A,(B,e)}^-$ と略記する．すると， $\theta^- \theta(h) = e \circ T(h \circ \eta_A) = e \circ T(h) \circ T(\eta_A)$ である．モナド単位律と h が T -射であることを組み合わせると，

$$\begin{array}{ccccc} TA & \xrightarrow{T(\eta_A)} & TTA & \xrightarrow{T(h)} & TB \\ & \searrow 1_{TA} & \downarrow \mu_A & & \downarrow e \\ & & TA & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

であるから， $\theta^- \theta(h) = h$ を得る．逆に， $\theta \theta^-(p) = e \circ T(p) \circ \eta_A$ である．いま， $\eta_A: 1_C \Rightarrow T$ が自

然変換であることと, (B, e) が T -代数であることを組み合わせると,

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & TA \\
 p \downarrow & & \downarrow T(p) \\
 B & \xrightarrow{\eta_B} & TB \\
 & \searrow 1_B & \downarrow e \\
 & & B
 \end{array}$$

であるから, $\theta\theta^-(p) = p$ を得る. よって, $\theta^- = \theta^{-1}$ であることが示された.

以上より, モナドから必ず自由関手と忘却関手の随伴を得られることが確かめられた. この随伴 $F^T \dashv U^T$ の単位は η であり, 余単位 ε は $\varepsilon_{(B,e)} = e$ によって与えられることは容易に確認できる.

さて, 定理 5.7 より, いかなる随伴からもモナドを構成できたことを思い出そう. 随伴 $F^T \dashv U^T$ から定理 5.7 の方法で作られたモナドを (T', μ', η') と書くことにする. しかし, $T' = U^T F^T = T$ であり, $\eta' = \eta$ であり, $\mu'_X = U^T(\varepsilon_{F^T(X)}) = \varepsilon_{(T(X), \mu_X)} = \mu_X$ である. つまり, $(T, \mu, \eta) = (T', \mu', \eta')$ となる. \square

以上の議論をまとめよう. 如何なるモナドが与えられても, その上の代数 (アイレンベルグ-ムーア代数) を考えることができ, 自由代数を構成する自由関手と忘却関手には随伴関係がある. そして, その随伴から元のモナドが復元される. 結論として, ありとあらゆるモナドは, 自由関手と忘却関手の随伴から作ることができる. まとめると,

$$\text{随伴} \implies \text{モナド} \implies \text{モナド上の代数} \implies \text{自由関手と忘却関手の随伴} \implies \text{元のモナド}$$

という流れになっている.

いま, 自由 T -代数上の T -射を考えよう. 自由関手 $F^T: C \rightarrow C^T$ と忘却関手 $U^T: C^T \rightarrow C$ の随伴関係 $F^T \dashv U^T$ より, 自然同型

$$C^T(F^T(A), F^T(B)) \simeq C(A, U^T F^T(B)) = C(A, T(B))$$

がある. したがって, 自由 T -代数上の T -射は, 元の圏における A から $T(B)$ への辺と対応付けられる. そして, A から $T(B)$ への辺とは, つまり, モナド T におけるクライスリ射 (定義 4.3) のことであった.

§ 7. 圏論による論理学

7.1. 推論と圏

圏の最初の例 1.1 として, われわれは論理式のなすグラフを挙げていた. 論理式のなすグラフにおいては, 頂点は論理式であり, そして辺は証明である. 論理学の推件計算 (sequent calculus) と

呼ばれる記法を用いて説明しよう．推件とは， $A \vdash B$ という記号列であり，これは「論理式 A を仮定すれば論理式 B を導ける」ということを意味する．推件計算において，たとえば，何らかの推論規則 r を用いて，推件式 $A \vdash B$ から推件式 $C \vdash D$ を導く，ということを以下の左式のように表す．

$$\frac{A \vdash B}{C \vdash D} (r)$$

上では 1 つの推件式から別の推件式を導いているが，1 つの推件式を導く際に複数の推件式を用いることは多々ある．また，推件式に証明のデータを明示的に付記する場合もある．本稿では，「 p は $A \vdash B$ の証明である」ということを $p: A \vdash B$ と書くことにする．たとえば，推件式 $A_i \vdash B_i$ が p_i によって証明されており，さらに推論規則 r を適用して， $C \vdash D$ を証明した，という状況を考えよう．推件計算においては，この状況を以下のように表す．

$$\frac{p_0: A_0 \vdash B_0 \quad \dots \quad p_n: A_n \vdash B_n}{r(p_0, \dots, p_n): C \vdash D} (r)$$

さて，推件計算における最も基本的な推論規則を記述しよう．まずは，規則に注目するために，証明のデータを付記しない形式で述べる．

$$\frac{}{A \vdash A} (1_A) \qquad \frac{A \vdash B \quad B \vdash C}{A \vdash C} (\circ)$$

左の規則 1_A は，無条件で「 A を仮定すれば A を導ける」が成立することを述べる．右の規則 \circ は，三段論法的一种であり，「 A を仮定すれば B を導ける」「 B を仮定すれば C を導ける」という 2 つの前提から，「 A を仮定すれば C を導ける」が得られるものである．規則 \circ は，論理学においてはカット規則 (*cut rule*) として知られる．記号 \vdash を二項関係だと思えば，規則 1_A は反射律であり，カット規則 \circ は推移律であると思ってよい．つまるところ，二項関係 \vdash が前順序 (preorder) であることを述べる．しかし，推件式に証明が付随しているものと考えれば，単なる前順序という以上の情報を持つ．

$$\frac{}{1_A: A \vdash A} (1_A) \qquad \frac{p: A \vdash B \quad q: B \vdash C}{q \circ p: A \vdash C} (\circ)$$

これを圏のことはを使って，辺 $A \xrightarrow{p} B$ によって，「 p は $A \vdash B$ であることの証明である」と述べられる．あるいは，何らかの論理式 A, B について， $A \vdash B$ という公理を加えることを考えられる．この場合，公理 $A \vdash B$ に a という名前を付け，それを辺 $A \xrightarrow{a} B$ として表す．公理は，無から $A \vdash B$ を推論できる，ということを表し，以下のように記述する．

$$\frac{}{a: A \vdash B} (a)$$

このようにして，圏の頂点は論理式であり，恒等辺 1_A は公理 $A \vdash A$ であり，辺上の垂モノイド演算 \circ はカット規則であり，個々の辺は付加的な公理を表す，と考えることができる．このようにして，ある意味では，圏と (素朴な) 論理は同一概念であると思える．したがって，圏の分析と

論理の分析を同時並行的に行うことが可能となる．また，圏論を論理学だと思って分析することが有効な場合もあるし，論理学を圏論だと思って分析することが有効な場面もある．これが圏的論理学 (*categorical logic*) の発想のひとつである．

本稿では，圏的論理学のある一側面について，その詳細を述べていくことにしよう．これは，ローヴェア理論（等式理論）のアイデアを拡張していくもので，上で述べたような論理式の圏は，モデルから生成される論理式の解釈として得られ，モデル本体の圏とは別にそれに付随する圏（グラフ）として得られる．さて，等式理論は，いかなる命題結合子も持たない論理体系であり，つまり命題論理に入る前段階である．ここから，少しずつ数理論理学の構成要素を等式理論に付加していくことによって，圏論における述語論理を徐々に導入していくことにしよう．

7.2. 圏の内部論理と部分対象半順序

有限積を持つ圏とは，論理学における関数記号だけからなる体系（多ソート等式理論）と同一視できるのであった．しかし，圏だけでは関数記号しか取り扱えないため，関係記号を解釈するための付加的構造が必要である．

言語 \mathcal{L} は関数記号と関係記号に区分される．数理論理学において，言語 \mathcal{L} の構造とは，領域 U と各関数記号 f の解釈 f^M および各関係記号 R の解釈 R^M を指定するデータ $M = (U, f^M, R^M)_{f,R}$ である．ここで，古典的な数理論理学においては， n 変数関数記号 f の解釈 f^M とは，何らかの関数 $f^M: U^n \rightarrow U$ であった．一方， n 変数関係記号 R の解釈は，領域の部分集合 $R^M \subseteq U^n$ を指定することである．

$$f^M: U^n \rightarrow U \qquad R^M \subseteq U^n$$

ただし，これは単ソートの場合の構造の定義であって，多ソートの場合には，少しの修正が必要である．前に述べたように，多ソート言語の場合には，ソートの集合 S が与えられている．各ソート X に対して，領域 $M(X)$ が割り当てられ，型 $X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ の関数記号 f の解釈 f^M と型 $Z_1 \times \cdots \times Z_\ell$ の関係記号 R の解釈は，以下のように指定する．

$$f^M: M(X_1) \times \cdots \times M(X_n) \rightarrow M(Y) \qquad R^M \subseteq M(Z_1) \times \cdots \times M(Z_\ell)$$

さて，問題となり得るものは，関係記号の解釈 R^M である．これは対応するソートの領域の部分集合として指定されているが，しかし，圏の文脈において，ある頂点の部分集合とは何であろうか．集合 B の部分集合 $C \subseteq B$ とは，包含写像 $C \hookrightarrow B$ のことであるが，これは単射である．単射概念は，圏の言葉においては，モノと呼ばれる．いま，任意の辺 $Z \xrightarrow{x} X$ は X の一般元と呼ばれていたことを思い出そう．

定義 7.1. 圏 C の辺 $f: X \rightarrow Y$ がモノ (*mono*) であるとは， C における X の任意の一般元 x, y に対して，以下の式を満たすことを意味する．

$$f \circ x = f \circ y \implies x = y.$$

例 7.2. Set においては, モノは単射を意味する. 具体的には, $x, y: 1 \rightarrow X$ を考えればよい.

モノはしばしば $S \rightarrow X$ という特殊な矢印記号で表されることがある. また, モノ $S \xrightarrow{t} X$ は X の部分対象 (*subobject*) とも呼ばれる. 本稿では, 以後, 頂点 S の部分対象を $\underline{A} \xrightarrow{A} S$ や $A: \underline{A} \rightarrow S$ などのように表記する. つまり, モノ A の始域を \underline{A} というように, 下線付きで表すことにする.

こうして, 圏における頂点の部分対象とは何であるか, ということが明確に定義された. そういうわけで, $Z_1 \times \cdots \times Z_\ell$ 型関係記号の解釈とは, 部分対象 $R^M: \underline{R}^M \rightarrow M(Z_1) \times \cdots \times M(Z_\ell)$ を任意に指定することだとしよう. したがって, 圏における多ソート言語の構造とは, 以下のデータによって与えられるものである.

$$M(X_1) \times \cdots \times M(X_n) \xrightarrow{f^M} M(Y) \qquad R^M \xrightarrow{R^M} M(Z_1) \times \cdots \times M(Z_\ell)$$

ふたたび, 数理論理学の導入の議論に立ち返ろう. 数理論理学において, ある言語の構造 S が与えられたとき, 与えられた論理式 φ がその構造 S において成立するかどうか, ということを議論することができる. とりあえずは, 最も単純な形式の論理式である, 原子論理式について議論しよう. まず, 単ソートの言語における原子論理式とは, ある n 変数関係記号 R と項 t_1, \dots, t_n について, $R(t_1, \dots, t_n)$ の形として書ける論理式である. つまるところ, 「かつ」や「または」などの論理記号を含まない論理式であり, 論理学に入る前段階の論理式である. 多ソートの場合には, 同様にして定義される.

定義 7.3. 多ソート言語 \mathcal{L} における原子論理式 (*atomic formula*) とは, ある $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_\ell$ 型関係記号 R と型 Z_i 項 t_i について, $R(t_1, \dots, t_\ell)$ の形の論理式を意味する.

一応, 注意しておく, 項 t_i は変数を含んでいてもよい. つまり, $t_i(\bar{x})$ は型 X 変数を含む型 Z_i 項 $t_i: X \rightarrow Z_i$ のように言い表すのが正確である. ここで, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ を現在考えている論理式に現れる変数をすべて含むリストとし, その型を $X = X_1 \times \cdots \times X_k$ と書いている. いま, 変数 \bar{x} にどのような値を代入すると $R(t_1(\bar{x}), \dots, t_\ell(\bar{x}))$ が構造 M において真になるか議論していることとしよう. これは, つまり以下を考えることに等しい.

$$\llbracket R(t_1(\bar{x}), \dots, t_\ell(\bar{x})) \rrbracket^M = \{\bar{a} \in M(X) : (t_1^M(\bar{a}), \dots, t_\ell^M(\bar{a})) \in R^M\}.$$

上では ℓ 個の項として書いたが, これを 1 つの項 $t = \langle t_1, \dots, t_\ell \rangle: X \rightarrow Z = Z_1 \times \cdots \times Z_\ell$ にまとめてもよい. そうすると, M における原子論理式 $R(t(\bar{x}))$ の評価は以下のように書ける.

$$\llbracket R(t(\bar{x})) \rrbracket^M = \{\bar{a} \in M(X) : t^M(\bar{a}) \in R^M\} = (t^M)^{-1}[R^M].$$

このアイデアを圏の話に一般化するために, Set における逆像はプルバックとして書き表せたことを思い出そう. つまり, $\llbracket R(t(\bar{x})) \rrbracket^M = (t^M)^{-1}[R^M]$ は以下のように表すことができる.

$$\begin{array}{ccc} (t^M)^{-1}[R^M] & \xrightarrow{\quad} & R^M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M(X) & \xrightarrow{t^M} & M(Z) \end{array}$$

Set において、これがプルバック図式であることは容易に確認できる。一般に、任意の圏において、代入はこのようなプルバックのことであると理解する。以後、Set における逆像 $f^{-1}[S]$ に相当するものを、一般の圏においては $f^*(S)$ と書くことにする。つまり、図式 $\underline{S} \rightarrow Y \leftarrow X$ の極限を $\underline{S} \leftarrow f^*(\underline{S}) \rightarrow X$ と書く。

命題 7.4. モノのプルバックはモノである。つまり、図式 $\underline{S} \rightarrow Y \leftarrow X$ の極限 $\underline{S} \leftarrow f^*(\underline{S}) \rightarrow X$ について、 $f^*(\underline{S}) \rightarrow X$ はモノとなる。

Proof. 命題の主張を言い換えると、以下のプルバック図式の辺 q が本当にモノである、ということを示せばよい。

$$\begin{array}{ccc} f^*(\underline{S}) & \xrightarrow{p} & \underline{S} \\ q \downarrow & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

辺 $Z \xrightarrow{x,y} f^*(\underline{S})$ が与えられたとき、 $qx = qy$ ならば $x = y$ となることを示せばよい。 $qx = qy$ を仮定すると、 $fqx = fqy$ であるが、図式の可換性より $fq = Sp$ であるから、 $Spq = Spq$ となる。このとき、 S がモノであることから、 $px = py$ が導かれる。よって、

$$X \xleftarrow{qx} Z \xrightarrow{px} \underline{S} = X \xleftarrow{qy} Z \xrightarrow{py} \underline{S}$$

が導かれるが、この 2 つは共に $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow \underline{S}$ の錘である。一方、 $X \xleftarrow{q} f^*(\underline{S}) \xrightarrow{p} \underline{S}$ は $X \xrightarrow{f} Y \leftarrow \underline{S}$ の極限であるので、次を可換とする辺 $Z \rightarrow f^*(\underline{S})$ が一意に存在する。

$$\begin{array}{ccccc} & & & & px=py \\ & & & & \curvearrowright \\ & & & & \underline{S} \\ & & & & \downarrow s \\ Z & \cdots \rightarrow & f^*(\underline{S}) & \xrightarrow{p} & \underline{S} \\ & & \downarrow q & & \downarrow s \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \uparrow qx=qy & & \uparrow \\ & & Z & & \end{array}$$

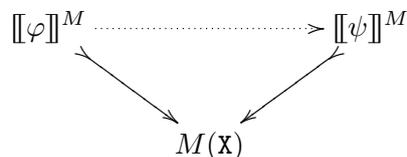
しかし、 $x, y: Z \rightarrow f^*(\underline{S})$ は共にこの可換性を満たす辺であるから、その一意性により $x = y$ を得る。□

これによって、 $f^*(S)$ はしっかりと A の部分対象であることがわかった。こうして、一般に $R(t(\bar{x}))$ の構造 M における評価は、 $M(X)$ の部分対象であることが保証される。

$$[[R(t(\bar{x}))]]^M = (t^M)^*(R^M) \rightarrow M(X).$$

さて、数理論理学の基本概念は、推件式 $\varphi \vdash \psi$ であった。現時点では、 φ, ψ は同じコンテキスト \bar{x} の原子論理式であるとしよう。素朴に集合論的構造を考えるのであれば、推件式 $\varphi \vdash \psi$ が M

において正しいとは、 $[[\varphi]]^M \subseteq [[\psi]]^M$ ということであろう。これは、図式的に書くのであれば、以下である。



この図式のことを $[[\varphi]]^M \rightarrow [[\psi]]^M$ であるとか、単に $[[\varphi]]^M \leq [[\psi]]^M$ と書く。もう少し丁寧に説明すると、前節で述べたように、推件式 $\varphi \vdash \psi$ は、何らかの圏の辺 $\varphi \rightarrow \psi$ と関連付けられる。しかし、いま、 $[[\varphi]]^M$ や $[[\psi]]^M$ は、圏の頂点ではなく、部分対象である。そこで、ある頂点 $M(X)$ の部分対象を頂点とする圏を考えたい。つまり、固定した終点へ向かうモノたちを頂点とする新たなグラフを導入する。

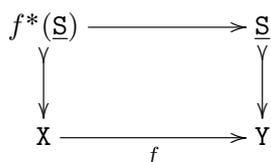
部分対象半順序: 一般に C を圏とし、圏 C の頂点 X を固定しよう。頂点 X へ向かうモノ $A \rightarrow X$ 全体を見ると、(余) 錘のような形をしている。終点 X を手で覆い隠すと、モノたちの始点たちの間にも様々な辺があることがよく見えるかもしれない。いま、モノ $A \xrightarrow{A} X$ から別のモノ $B \xrightarrow{B} X$ への辺があるというのは、頂点 A から X に向かう際に、 $A \xrightarrow{A} X$ を用いるルートと等しいコストの $B \xrightarrow{B} X$ 経由ルートが (一意に) 存在することとする。つまり、



ただし、いま $A \xrightarrow{A} X$ から $B \xrightarrow{B} X$ への辺があるということを順序記号 \leq によって表している。このように X へ向かうモノ全体に前順序を入れた後、この順序の下で等しいモノたちを同一視する。その結果として得られる半順序のハッセ図を $\text{Sub}(X)$ と書き、これを部分対象半順序と呼ぶ。

こうして、 $\varphi \vdash \psi$ が M において成立するとは、部分対象半順序 $\text{Sub}(M(X))$ において $[[\varphi]]^M \leq [[\psi]]^M$ が成立することであると定義できるのである。

部分対象関手: さて、部分対象半順序において、代入という操作についても再考察しよう。部分対象半順序は、圏 C の頂点 Y に対して半順序 $\text{Sub}(Y)$ を割り当てる。半順序と単調写像 (半順序準同型) のなす圏 Pos を考えれば、これは圏 C の頂点 Y に対して圏 Pos の頂点 $\text{Sub}(Y)$ を割り当てるものだと言い替えられる。いま、圏 C の辺 $X \xrightarrow{f} Y$ が与えられたとき、各部分対象 $S: \underline{s} \rightarrow Y$ に対して、次のプルバック図式を考えよう。



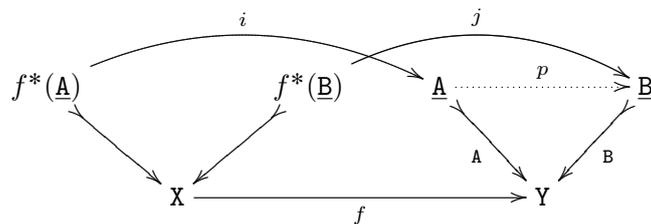
この $f^*(\underline{s}) \rightarrow X$ は X の部分対象であるから、 $\text{Sub}(X)$ に属す。つまり、辺 $X \xrightarrow{f} Y$ が与えられれば、部分対象 $S: \underline{s} \rightarrow Y$ を部分対象 $f^*(S): f^*(\underline{s}) \rightarrow X$ に変換する写像を得る。この写像を

$\text{Sub}(X \xrightarrow{f} Y)$ と書くことにしよう .

$$\text{Sub}(X \xrightarrow{f} Y): \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X); \quad S \mapsto f^*(S).$$

命題 7.5. 圏 C の任意の辺 $X \xrightarrow{f} Y$ について, $\text{Sub}(X \xrightarrow{f} Y): \text{Sub}(Y) \rightarrow \text{Sub}(X)$ は単調写像である .

Proof. Y の部分対象 A, B に対して, $A \leq B$ を仮定しよう . 現況を図式的に書けば, 以下のようになっている .



ここで, 2つの(少し歪んだ)平行四辺形はプルバック図式である . 定義より, $X \leftarrow f^*(B) \xrightarrow{j} B$ は図式 $X \xrightarrow{f} X \xleftarrow{B} B$ の極限である . 一方, $X \leftarrow f^*(A) \xrightarrow{p \circ i} B$ もまた図式 $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{B} B$ の錘となっている . よって, 極限の定義より, この図式を可換にする辺 $f^*(A) \rightarrow f^*(B)$ が一意に存在する . 特に, $f^*(A) \leq f^*(B)$ となることが示された . つまり, これは $\text{Sub}(X \xrightarrow{f} Y)$ が単調であることを意味する . □

以上より, Sub は圏 C の頂点を Pos の頂点に移し, Sub は圏 C の辺を Pos の辺に移している . ただし, 辺の向きは逆転していることに注意する . これより, Sub は反対圏 C^{op} から半順序の圏 Pos への関手 $\text{Sub}_C: C^{\text{op}} \rightarrow \text{Pos}$ であると述べることができる . 正確には, 関手であることを示すには, $f^*(g^*(A)) = (g \circ f)^*(A)$ など示す必要があるが, これは読者の演習問題とする .

7.3. デカルト圏とホーン論理

まずは命題結合子のひとつである「かつ」の分析から始めよう . 「かつ」は連言 (conjunction) とも呼ばれ, 論理記号では \wedge と書かれ, 以下の推論規則を持つ .

$$\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi} (\pi_0) \quad \frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} (\pi_1) \quad \frac{\theta \vdash \varphi \quad \theta \vdash \psi}{\theta \vdash \varphi \wedge \psi} (\langle\langle -, - \rangle\rangle)$$

また, 命題定数として, 恒真を表す記号 \top を用いることがある . この場合, 恒真式 \top に関する以下の推論規則を持つ .

$$\frac{}{\varphi \vdash \top} (!)$$

このように命題変数以外は, 論理結合子 \wedge と恒真式 \top しか扱わない式は, ホーン式と呼ばれることがある . 特に, ホーン式 φ, ψ に対する推件式 $\varphi \vdash \psi$ のみを扱う論理は, ホーン論理 (*Horn*

logic) と呼ばれる。ホーン論理は、デカルト (cartesian) 論理、左完全 (lex) 論理などと呼ばれることもある。

さて、証明のデータを無視して \vdash を二項関係と思えば、規則 1_A と \circ は \vdash が前順序となることを述べるものであった。したがって、 \vdash を \leq と置き換えると、推論規則 $\pi_0, \pi_1, \langle -, - \rangle$ は次のように書き直せる。

$$p \wedge q \leq p \qquad p \wedge q \leq q \qquad (r \leq p \ \& \ r \leq q) \Rightarrow r \leq p \wedge q$$

これは、 $p \wedge q$ が p と q の最大下界 (least lower bound), つまり下限 (infimum) であることを述べる。したがって、規則 $1_A, \circ, \pi_0, \pi_1, \langle -, - \rangle$ に反対称律を合わせたものは、いわゆる下半束と呼ばれるものに等しい。

定義 7.6. 2 項積を持つハッセ図は、下半束 (lower semilattice) と呼ばれる。

また、推論規則 ! については、 $p \leq \top$ と表せるから、これは \top が前順序 \leq の最大元であることを意味する。よって、ホーン論理から証明のデータを取り除いたものは、最大元を持つ下半束であると考えてよい。さて、内部論理がホーン論理となっているような圏とはどのようなものであるかについて議論しよう。これについて、有限積を持つ圏 C であればよいと思うかもしれないが、論理式の真理性は部分対象半順序において評価される。したがって、部分対象半順序 $\text{Sub}_C(y)$ が有限積を持つ圏、つまり最大元を持つ下半束になる必要がある。このために圏 C が満たしているべき条件とは何か、ということであるが、その答えは、任意の有限極限を持つこと、つまり有限完備性である。

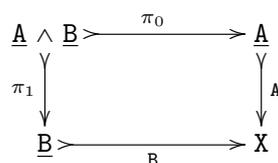
定義 7.7. 圏が有限完備であるとき、デカルト (cartesian) 圏あるいは左完全 (left exact, or lex) 圏と呼ばれる。

実際に、圏が有限極限を持つならば、部分対象半順序は必ず有限積を持つことを確認しよう。以後、しばしば辺上の垂モノイド演算 \circ を省略して、たとえば $a \circ b$ のことを ab と書くことがある。

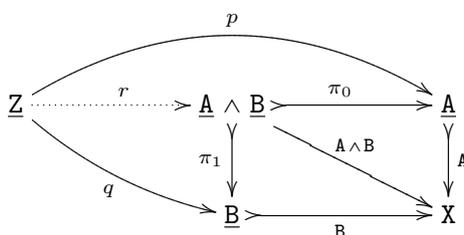
命題 7.8. デカルト圏 C において、 C の任意の頂点 X の部分対象半順序 $\text{Sub}_C(X)$ は最大元を持つ下半束となる。

Proof. まず、任意の部分対象 $S: \underline{s} \rightarrow X$ に対して、 $S = 1_X \circ S$ であるから、 $1_X \leq S$ となる。つまり、 $1_X: X \rightarrow X$ は $\text{Sub}_C(X)$ における最大元である。あとは、下限が存在することを示せばよい。 C はデカルト圏であるから、プルバックが存在する。いま、 X の部分対象 A, B に対して、以下のプル

バック図式を考える．



π_0, π_1 がモノであることは命題 7.4 から従う．このとき，モノ $A \wedge B := A\pi_0 = B\pi_1$ が目的の下限であることを示そう．まず， π_0 と π_1 によって $A \wedge B \leq A, B$ は導かれる．つづいて， X の部分対象 Z が $Z \leq A, B$ を満たすと仮定する．順序の定義より，辺 $Z \xrightarrow{p} \underline{A}$ および $Z \xrightarrow{q} \underline{B}$ が存在し， $Ap = Z = Bq$ となる．特に， $Ap = Bq$ であるから， $\underline{B} \xleftarrow{q} Z \xrightarrow{p} \underline{A}$ は $\underline{B} \xrightarrow{B} X \xleftarrow{A} \underline{A}$ の錘である．一方，プルバックの定義より， $\underline{B} \xleftarrow{\pi_0} \underline{A} \wedge \underline{B} \xrightarrow{\pi_1} \underline{A}$ は $\underline{B} \xrightarrow{B} X \xleftarrow{A} \underline{A}$ の極限であるから，以下を可換にする辺 $Z \xrightarrow{r} \underline{A} \wedge \underline{B}$ が一意に存在する．



特に $(A \wedge B)r = Bq = Z$ であるから， $Z \leq A \wedge B$ が従う．以上より， $A \wedge B$ が A と B の下限であることが示された． \square

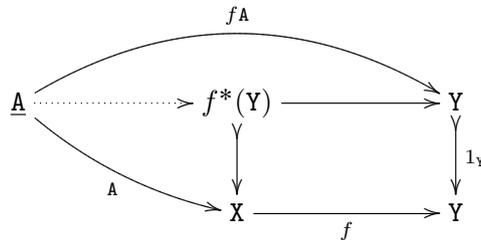
実際は，単に最大元を持つ下半束というだけでなく， Sub_C が下半束に対する良い振る舞いを持つことを示すことができる．いま， $L = (L, \leq_L, \wedge_L, 1_L)$ および $M = (M, \leq_M, \wedge_M, 1_M)$ を最大元を持つ下半束としよう．写像 $h: L \rightarrow M$ が準同型であるとは， h が順序，下限，最大元を保つことである．つまり，

$$x \leq_L y \implies h(x) \leq_M h(y), \quad h(x \wedge_L y) = h(x) \wedge_M h(y), \quad h(1_L) = 1_M.$$

最大元を持つ下半束と準同型のなす圏 SL_\wedge と書くことにする．これから示すことは，デカルト圏 C において， Sub_C は C^{op} から SL_\wedge への関手となっていることである．既に $\text{Sub}_C: C^{\text{op}} \rightarrow \text{Pos}$ が関手であり， $\text{Sub}_C(X)$ が最大元を持つ下半束となることは知っているのだから，後は $\text{Sub}_C(f) = f^*$ が最大元を持つ下半束の準同型となっていることを示せばよい．つまり， f^* が下限と最大元を保つことを示す．論理式の解釈の文脈では， f^* は f の代入を意味するものであったから，「 f^* が下限を保つ」という性質は，「かつと代入が交換可能である」ことを述べるものでもある．つまり， $(\varphi \wedge \psi)[t/y] = \varphi[t/y] \wedge \psi[t/y]$ である．

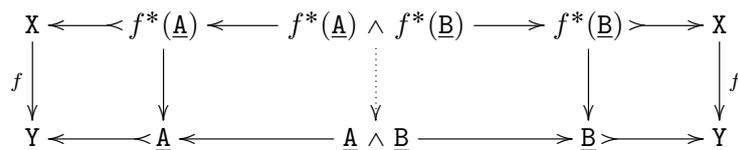
命題 7.9. C がデカルト圏ならば， Sub_C は C^{op} から SL_\wedge への関手である．

Proof. Sub_C が最大元と下限を保つことを示せばよい．まず，最大元を保つこと，つまり $f^*(1_Y) = 1_X$ であることを示すためには， X の任意の部分対象 $A: \underline{A} \rightarrow X$ に対して， $A \leq f^*(1_Y)$ であることを確認すればよい．これについては，プルバックの定義から，以下が明らかに成立する．

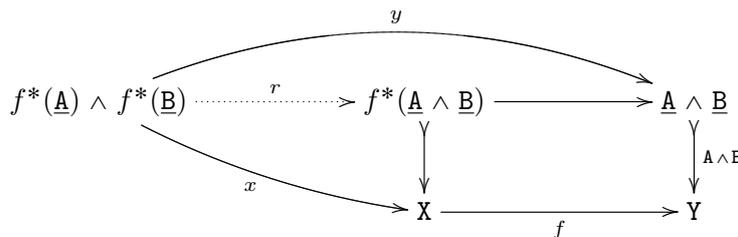


よって， $A \leq f^*(1_Y)$ が常に成立するから， $f^*(1_Y)$ は $\text{Sub}_C(Y)$ の最大元である．つづいて， f^* が下限を保つこと，つまり $f^*(A \wedge B) = f^*(A) \wedge f^*(B)$ であることを示せばよい．命題 7.8 より， $A \wedge B \leq A, B$ であり，命題 7.5 より f^* は単調であるから， $f^*(A \wedge B) \leq f^*(A), f^*(B)$ が成立する．よって，下限の性質より $f^*(A \wedge B) \leq f^*(A) \wedge f^*(B)$ を得る．

逆方向については，以下の図式が可換となることは容易に確認できる．



ここで両端の四角形はプルバック図式であり，中央の辺は 2 項積 $\underline{A} \wedge \underline{B}$ の普遍性によるものである．上の図式の左半分あるいは右半分を見ると， $X \xleftarrow{f^*(A) \wedge f^*(B)} \underline{A} \wedge \underline{B} \xrightarrow{A \wedge B} Y$ が $X \rightarrow Y \xleftarrow{A \wedge B} \underline{A} \wedge \underline{B}$ の錘となっていることがわかる．よって，プルバックの定義より，



を可換とするような辺 $f^*(A) \wedge f^*(B) \rightarrow f^*(A \wedge B)$ が一意に存在することが示される．特に $f^*(A) \wedge f^*(B) \leq f^*(A \wedge B)$ が成立する．以上より， f^* が下限を保つことが示された． \square

デカルト圏の内部論理の持つ本質的なデータを抽出しよう．上の定理によれば，デカルト圏 C の部分対象関手 Sub は，単に Pos への関手というだけでなく， SL_\wedge への関手になっている．関手 Sub は，ある意味で，論理式に対して真理値を割り当てるものとなっており，このような関手が論理学における解釈の本質であると考えられる．このアイデアを突き詰めたものが，ローヴェアによって導入されたドクトリン (doctrine) の理論である．

定義 7.10. 圏 C 上のドクトリン (*doctrine*) とは, 関手 $P: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{SL}_{\wedge}$ を意味する.

関手 $f: C^{\text{op}} \rightarrow D$ のことを C 上の D 値前層 (D -valued presheaf) と呼ぶ人もいる. この言葉を用いれば, 圏 C 上のドクトリンのことを C 上の \mathbf{SL}_{\wedge} -値前層と呼んでもよい.

例 7.11. C がデカルト圏ならば, 部分対象関手 Sub は C 上のドクトリンである.

ドクトリンは, 論理式に対する真理値割り当ての部分抽出したものであり, その真理値割り当ての方法が必ずしも部分対象関手 Sub である必要はない.

7.4. 等号付き論理

ここまで扱ってきたものは, いわゆる等号なし論理というものである. 実際には, ホーン論理なども等号付き論理として取り扱われることがあり, 本稿ではその流儀に従う. このため, ここでは等号に関する圏論的分析を行っていくことにしよう. 等号は, 以下の規則に従うものである.

代入に関する規則:

$$\frac{\varphi \vdash \psi}{\varphi[t/x] \vdash \psi[t/x]}$$

等号に関する規則:

$$\top \vdash x = x \qquad (x = y) \wedge \varphi \vdash \varphi[y/x]$$

等式理論 (ローヴェア理論) でも, 等式 $t = u$ を取り扱ってきたが, 等式理論においては, 与えられた等式を公理として加える, という行為のみを行っていた. ここで議論することは, 正しいとは限らない等式 $t = u$ が正しいか正しくないか, どれくらい正しいかを議論することである. 等式 $t =_x u$ の解釈 $\llbracket t =_x u \rrbracket^M$ は, これまでと同様に部分対象半順序の元として与えられるが, これは等化子を利用するのが妥当であろう.

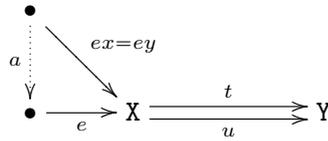
$$\llbracket t = u \rrbracket^M \xrightarrow{\quad} M(X) \xrightleftharpoons[t]{t} M(Y)$$

ここで, デカルト圏は有限極限を持ち, 等化子とは $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 型図の極限であったことを思い出そう. 一応, 確認しなければいけないことは, $\llbracket t = u \rrbracket^M \rightarrow M(X)$ が本当にモノになっているか, という点であるが, これについては容易に示せる.

命題 7.12. 任意の等化子はモノである.

Proof. 圏 C の辺 $t, u: X \rightarrow Y$ が等化子 e を持つと仮定する. このとき, 与えられた一般元 x, y に対して, $ex = ey$ が $x = y$ を導くことを示せばよい. いま, $ex = ey$ を仮定すると, ex, ey は

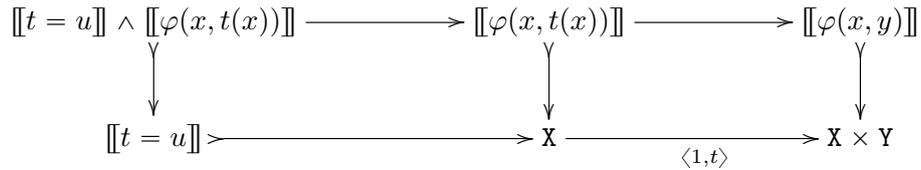
• \Rightarrow • 型図 $t, u: X \rightarrow Y$ の錘となっている。また, e は $t, u: X \rightarrow Y$ の極限であるから, 以下を可換にする辺 a が一意に存在する。



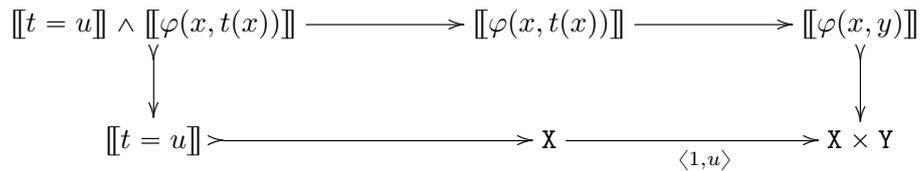
一方, $a = x$ としても $a = y$ としても上の図式は可換になるから, 一意性より $x = y$ を得る。□

定理 7.13 (ホーン論理に対する健全性定理). ホーン論理で成立する任意の推件式は, デカルト圏 C の内部論理において真である。

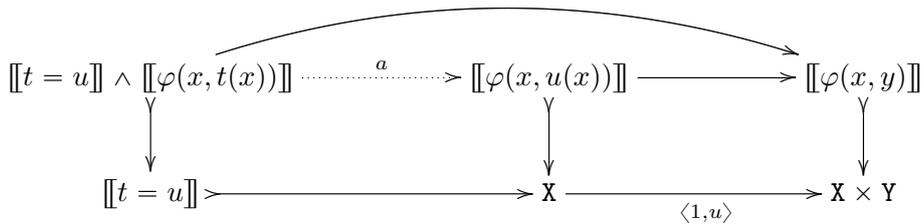
Proof. 型 $X \times Y$ 論理式 φ と項 $t, u: X \rightarrow Y$ について, $(t = u) \wedge \varphi(x, t(x)) \vdash \varphi(x, u(x))$ を示す。まず t の代入と \wedge の解釈の定義より, 以下のプルバック図式を得ている。



一方, 等号の解釈より, $\langle 1, t \rangle$ と $\langle 1, u \rangle$ を等化しているから, $\langle 1, t \rangle$ を $\langle 1, u \rangle$ に取り替えた以下の図式も可換になっている。



特に, この図式中における $X \leftarrow [[t = u]] \wedge [[\varphi(x, t(x))]] \rightarrow [[\varphi(x, y)]]$ は, 図式 $X \xrightarrow{\langle 1, u \rangle} X \times Y \leftarrow [[\varphi(x, y)]]$ の錘になっている。ところで, $[[\varphi(x, u(x))]]$ は定義より $X \xrightarrow{\langle 1, u \rangle} X \times Y \leftarrow [[\varphi(x, y)]]$ の極限であるから, 以下の図式を可換にする辺 a が一意に存在する。



つまり $[[t = u]] \wedge [[\varphi(x, t(x))]] \leq [[\varphi(x, u(x))]]$ であるから, 圏 C において $(t = u) \wedge \varphi(x, t(x)) \vdash \varphi(x, u(x))$ が成立することが示された。□

7.5. TODO

この先の流れとして，正則圏 (regular category), 整合圏 (coherent category), ハイパードクトリン (hyperdoctrine), トライポス (tripos), トポス (topos) とつづく予定．

§ 8. 補遺，あとがき，参考文献

8.1. 圏の大きさについて

圏に関するテキストを読んだとき，「大きい」「小さい」「局所的に小さい」などの修飾語を見かけたことがある人も多いかと思う．これはある種の矛盾の回避のために導入されるものであるが，初学者はあまり気にしないのがよいと思う．このようなものは実際に矛盾にぶつかってはじめて有り難みがわかるので，まずは何度か矛盾してみるのがよい．つまり，「『大きさ』に気がつけなと，矛盾することがある」ということだけ認識しておいて，何かふとしたときに矛盾が発生したら，「あ，これはきっといわゆる『大きさ』ってやつのせいだな」と意識できるようであればよい．矛盾に達して初めて，「大きさ」の詳細について学べば十分である．ここでは，圏の大きさに関して，あまり数学的詳細に立ち入らない概説を与える．

まず，圏とは，多重有向グラフに少し構造の付加されたものであったが，確かに圏の理論に現れる多重有向グラフはちょっとだけ大きめである．たとえば，本稿で扱うグラフであれば，そのかなり多くは無有限グラフである．とはいえ，数理論理学に近い分野の人であれば，グラフ理論と聞けば，無有限グラフ（多くの場合には非可算無有限グラフ）に関するグラフ彩色の問題であるとか無有限ラムゼー理論などを最初に思い浮かべる人もいるだろう^{*1}．このように，グラフの研究において無有限グラフを扱うことも珍しくはない．実際のところ，人間には有限はむずかしすぎるし，無有限の方が有限より簡単なことは多いので，とくに無有限を恐れる必要はない．

カントールのパラドックス：しかし，さらに大きいサイズのグラフとなると，少し注意を払う必要がある．たとえば，例 1.17 で挙げた，集合全体を頂点とし関数を辺とする圏 Set などである．ところが，

「集合をすべて集めたものは集合ではない」

ということは集合論の創始者カントールが既に気づいていたことであり，カントールのパラドックスとも言われていた．とはいえ，集合という日常用語に引きずられるとパラドックスに見えるものの，「集合」という用語はあくまで数学用語である．つまり，形式的には，特定の数学的概念を「集合」と読んでいては過ぎないから，「集合」を「机」「ビール」「 X 」などの別の名に差し替えてもよい．そして，実際には，

「 X をすべて集めたものは X ではない」

^{*1} たとえば，筆者の周辺だと有限組合せ論を研究している人よりも無有限組合せ論を研究している人の方が多いので，グラフといえばもちろん無有限グラフを指す．これをサンプリングバイアスという．

というパターンがある．たとえば， X を 100 グラムの物品を指す用語であるとしよう．いま，100 グラムの物品を 100 個所持していたとする．個々の物品は 100 グラムなのに，しかし，100 グラムの物品 100 個すべてを合わせたものは 100 グラムではない！ 100 グラム \times 100 なので，なんと 10 キログラムになってしまうのである！

これは，そもそも X の閉包性に難があるため，あまり良い例ではないから，もう少し良い例を挙げよう．次の主張は，カントールのパラドックスと完全に同じ構造を持っている．

「有限集合をすべて集めたものは有限集合ではない」

これは当然の主張である．たとえば，自然数 n の個々は有限の数であるのに，それをすべて集めた集合 \mathbb{N} は無限集合である．ただ，有限集合全体，というのは振る舞いが悪いので，遺伝的有限集合全体であるとか有限集合の型全体を考えた方がよい．これらは無限集合であるが，しかし可算集合である．このように，有限的なものを集めると，可算無限という次のスケールに移る．このパターンは無限に続く．たとえば，

「可算順序数をすべて集めた集合の大きさは，最小の非可算濃度 \aleph_1 である」

これは定義のようなものであるので良い例ではないかもしれないが，とにかく，集合の個々の要素は可算サイズのものであったとしても，これらを集めると非可算サイズになる．ただし，非可算サイズの中では最小である．一般に，「大きさ \aleph_α の順序数すべてを集めたものが $\aleph_{\alpha+1}$ 」である．つまり，至って当然の話なのであるが，

「あるスケールのもをすべて集めると次のスケールに移る」

というパターンが成立している．

大きさのスケール: さて，圏のテキストでは，「大きい」「小さい」という二元的な区分けをすることが多い．この「大きい」「小さい」という二元的な考え方は，矛盾のひとつの回避法というだけであって，絶対的なものではない．矛盾の回避法はいくらでもあり，どれを選択するも自由である．

そして，この二元的な区分けにおいては，集合とクラスの区別等と言った話が出てくるが，その直感的な意味は理解しにくい．それなら「大きさ」という概念を導入してしまった方が，「大きい」ものにも大きさのレベルがあり，「どういうものかを考えるとどれくらい大きくなるか」などが明確になって良いだろう．何事もゼロかイチである，というように白黒付けてしまうと，誤解を招きがちである．あらゆる概念に対して，白と黒の中間の階層があると認識して，とりあえずグラデーションを付けて理解しようと試みるのが重要である．たとえば，以下のような集合のグラデーションを考えよう．

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$$

U_0 にはおよそ「有限的なもの」が入っているとす．そして U_1 には「通常の数学で現れるもの」がすべて入っている．このとき，次の概念を考えよう．

- 圏 $C = (V, E)$ が小さい (*small*) とは， $V, E \in U_1$ であることを意味する．

- 圏 $C = (V, E)$ が局所的に小さい (*locally small*) とは, $V, E \in \mathcal{U}_2$ かつ任意の頂点 $u, v \in V$ に対して $E(u, v) \in \mathcal{U}_1$ であることを意味する.

一般に, 圏 $C = (V, E)$ が大きさ $\leq n$ であるとは, $V, E \in \mathcal{U}_n$ であることを意味する. 局所的に大きさ $\leq n$ ということも同様にして定義される. たとえば, 大きさ 0 というのは, 圏をグラフとして見れば, 有限グラフとなっていることを意味する. 局所的に大きさ 0 というのは, どんな 2 頂点の間にも高々有限個の辺しかないことを意味する. つまり, 次数有限のグラフである. ただし, 頂点の集合 V や辺の集合 E 自体は無限集合かもしれないことに注意する.

さて, 何らかの方法で集合のグラデーションを決めたとして. このとき, たとえば, 集合と関数の圏 Set と言った場合には, \mathcal{U}_1 に属す集合と関数の圏を意味する. 標準的な系列 $(\mathcal{U}_n)_n$ の取り方においては, Set は大きさ 2 であり, 局所的には大きさ 1 となる. このように, 通常の圏論で扱っている「 X を対象とし Y を射とする圏」を「『 \mathcal{U}_1 に属す X 』を対象とし『 \mathcal{U}_1 に属す Y 』を射とする圏」に置き換えて通常通りの圏論を議論できる. この \mathcal{U}_1 の代わりに \mathcal{U}_n を考えても良い. \mathcal{U}_n に属す集合と関数の圏 Set_n や \mathcal{U}_n に属す圏と関手の圏 Cat_n を考えれば, Set_n や Cat_n の大きさは $n + 1$ である. このように, あるスケールのものをすべて集めたとしても, 特に矛盾は起きず, 単に次のスケールに移るだけである. 重要なことは,

「常に大きさの上界を与えておく」

という点であり, これによって矛盾を回避できる, というのが基本的な発想である.

グロタンディーク宇宙: 圏論を展開するための集合のグラデーション (\mathcal{U}_n) を具体的に与えるためには, \mathcal{U}_1 以降はそれなりの大きさのものを持ってくる必要がある. これについては, 具体的には, とても小型の巨大基数概念で強到達不可能基数 (*strongly inaccessible cardinal*) と呼ばれるものを用いることができる. 恐ろしげな名前だが, 集合論においては微小サイズだと認識されている基数であり, その扱いも容易である. 集合のグラデーションとしては, たとえば, κ_n を n 番目の強到達不可能基数として,

$$V_\omega \subset V_{\kappa_0} \subset V_{\kappa_1} \subset V_{\kappa_2} \subset \dots$$

というものを考えることができる. ここで, V_κ は, ランク κ 未満の集合全体の集合である.

一般に, 強到達不可能基数 κ について, ランク κ 未満の集合全体の集合 V_κ のことをグロタンディーク宇宙 (*Grothendieck universe*) という. 大層な名前が付いているが, かなり初等的な概念なのであまり恐れる必要はないと思う. この集合 V_κ は, いわゆる ZFC 集合論の公理というものをすべて満たすので, 通常の数学で用いられるありとあらゆる操作で閉じている, というのが良いところである. このため, 通常の数学に現れる集合はすべて V_κ の中に入っていると思ってよい.

集合の大きさについて, $\mathcal{U}_1 = V_{\kappa_0}$ までではなく, 無限の系列を考えたい理由についても少し説明しよう. たとえば, 集合と関数の圏 Set や小さい圏の圏 Cat は共に大きさ 2 だが局所的に大きさ 1 である. 大きさ 2 とはいっても, V_{κ_0+2} くらいには属すから, 大きさ 2 の中では最も小さい部類であろう. Set や Cat を頂点に持つ圏を考えたい場合には, たとえばランク $\kappa_0 + \omega$ 未満の集

合全体の圏や、ランク $\kappa_0 + \omega$ 未満の圏全体の圏などを考えればよいが、このランクはあまり良い閉包性を持たない。Set や Cat を頂点に持ち、さらに Set と Cat のように良い閉包性を持つ圏 Set' や Cat' を考えたい場合は、 κ_0 の次の強到達不可能基数を持ち出せばよい。すると次は Set' や Cat' を頂点に持つ圏 Set'' や Cat'' を考えたい。これを任意に繰り返すことを認めよう、というのが無限の系列を扱う理由である。

この系列を具体的に得るためには無限個の強到達不可能基数が必要になるが、とはいえ、最初の無限個の強到達不可能基数などはたいした大きさにはならないので、そんなに問題ではないだろう。たとえばマール基数というとても小型の巨大基数概念があるが、これを持ってくれば、その下にはマール基数個の強到達不可能基数があるはずである。

とはいったものの、集合論の人たちにとっては、もっと遥かに大きい巨大基数サイズのグラフの構造を研究することもまた日常茶飯事である。そのような集合論の人たちの扱うグラフを対象に含めるためには、扱うことが分かっているグラフサイズのいずれよりも大きい強到達不可能基数 κ を取ってくる必要がある。しかし、そのような状況下においては、もはや強到達不可能基数など微生物よりも小さいので、つまり、これもまた、取り扱うグラフサイズからほんの誤差程度だけちょっと大きくした κ を持ってくればよいだけである。何にせよ、本稿では、そんなに大きなグラフは取り扱わないので、あまり細かいことは気にしないことにしよう。純粋に圏論に必要な基数というと、多くの場合には、複数個の強到達不可能基数程度の小さなもので十分であるが、いくつかの例外もあるようで、ヴォペンカ基数などが用いられることもあるようである。

このような圏論の集合論的基礎付けについては、以下の概説に詳しくまとまっている。

Michael A. Shulman, “Set theory for category theory”, arXiv:0810.1279

8.2. あとがき

ここでは、本稿を書く切っ掛けになった出来事を書き残しておこう。事の起こりは、2017 年春、筆者が名古屋大学情報学部にて教員として着任してすぐのことである。そのとき、情報文化学部の学部 3 年生向けの数理論理学の講義を担当していたのだが、何回目かの講義の後、学生の謝昊辰さんから

Peter T. Johnstone, “Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium”, Clarendon Pr, 2003.

のセミナーに参加しないかと誘われた。実際には、名古屋大学情報学研究科の社会情報学専攻の久木田水生先生の研究室の学生であった那須洋介さんが主導しているセミナーのようであった。筆者は圏論についてはあくまでライトユーザーに過ぎなかったが、2017 年度的那須さんのセミナーに一年間参加させて頂いたおかげで、トポス理論の再勉強の切っ掛けになった。

その後も、2019 年度には、久木田水生先生の研究室の修士一年生の川嶋康太さんから

J. Lambek, and P. J. Scott, “Introduction to Higher-Order Categorical Logic”, Cam-

bridge University Press, 1988.

のセミナーに誘われ、色々勉強させて頂いた。これだけ圏論に興味を抱く学生が多いなら講義内容に圏論を含めてもよいのではないかと、思い、2019年秋期の計算可能性理論の講義のトピックの一つとして、実現可能性トポス (realizability topos) を取り扱おうと考えた。残念ながら、講義時間が足りずに実現可能性トポスまでは辿り着かなかったが、その過程で生まれたのがこの講義ノートである。

8.3. 参考文献

本稿は、必要な前提知識を最小限に抑えるため、前提知識が必要な具体例を出すことをかなり控えている。したがって、具体例については、適宜、別の文献を参照することを推奨する。たとえば、最近見かけた次の文献は、無料で公開されており、最小限の予備知識で理解できる具体例が豊富にリストアップされているようなので、ここで紹介しておく。また、本稿で取り上げたトピックとも非常に共通点が多い(難度)。

Paolo Perrone, “Notes on Category Theory with examples from basic mathematics”, arXiv:1912.10642

難度として星をいくつか与えたが、標準的な数学科生向けの入門書を「難度 ~ 」程度としている。難度の最大値は 5 かもしれないし 10 かもしれないし、もっと多いかもしれない。あくまでただの主観的指標であり、もちろん絶対的な基準ではない。数学科生以外の人や実力に自信のない人は、数学科生向けの入門書よりさらに難度が低い本を手にするのも一つの選択肢だと思う。このため、圏論のテキストをかなり難度の低いものから、いくつか紹介しておく。ただし、圏に辿り着く前段階の「おはなし」が長くなりすぎておらず、「定義・定理・証明」がしっかりと書かれていそうなものから選んだ。

難度 ~ : まず、全く数学の予備知識のいらないテキストを紹介する。ただし、前提知識が不要なため、圏の基本的な話に辿り着くまでが長く冗長になりがちである。数学科以外の人でも読者層として想定しているものが多い。

- Brendan Fong, and David I. Spivak, “An Invitation to Applied Category Theory: Seven Sketches in Compositionality”, Cambridge University Press, 2019.
- David I. Spivak, “Category Theory for Scientists”, The MIT Press, 2014.
- Michael Barr, and Charles Wells, “Category Theory for Computing Science”, Prentice Hall, 1995.

本稿の執筆の途中段階からは、Barr-Wells 本を少し参考にした。タイトルに計算機科学とあるが、計算機科学の予備知識は一切不要で、実際の中身は至って数学であるため、気軽に読めると思う。ウェブ上で無料で公開されているという点も良い。とてつもなく簡単な内容から始めて、最

終的にはトポスやモノイダル圏などの発展的な話に進むが、説明があまりにも丁寧すぎて、なかなか話が進まないという欠点がある。しかし、以下の Awodey 本などよりも難度が低く、入門的話題が一通り網羅されている文献として紹介しておく。

難度 ~ : 数学科向けの圏論の入門的テキストとして頻繁に挙げられるものは、以下の 4 つのテキストだと思われるので、紹介だけしておく（後でもう少しまともなコメントを付けます）。評判が良い理由としては、入門的話題が網羅されており、コンパクトにまとまっている、というのが評価点であるかと思う。

- S. Awodey, “Category Theory”, Oxford University Press, 2008.
[4 大入門書 (?) の中では最も難度が低いと思われる。数学、論理学、計算機科学、いずれの分野の人にも適切な入門書である。]
- T. レンスター著、斎藤 恭司 (監修), 土岡 俊介 (翻訳) 「ベーシック圏論 普遍性からの速習コース」丸善出版 2017.
[非常に良い、数学科向け圏論テキストである。ただし、論理学や計算機科学で使われるような圏論的概念はあまり取り扱われない。]
- S. マックレーン著、三好 博之 (翻訳), 高木 理 (翻訳) 「圏論の基礎」丸善出版 2012.
[具体例が難しいので難しい本だと思われがち。]
- Riehl, “Category Theory in Context”, Dover Publications, 2016.
[非常に評判が良く、現状では最良の圏論テキストとの噂であるが、ちゃんと読み通していないのでコメントは控えておく。]

本稿の執筆の際にも、Awodey 本やレンスター本を少しだけ参考にしている。

第 6 節の先へ: 第 6 節まででモナド上の代数を学んだら、次は、その双対である余代数 (coalgebra) を学ぶのがいいのではないかと思う。現代の理論計算機科学では、余代数はかなり用いられているようである。

- Bart Jacobs, “Introduction to Coalgebra: Towards Mathematics of States and Observation”, Cambridge University Press, 2016.

他には、以下の書籍にも触れておこう。

- 圏論の歩き方委員会, 圏論の歩き方, 日本評論社 2015.

この書籍中の、長谷川真人さん、勝股審也さん、蓮尾一郎さん、丸山善宏さんなどが語っているトピックが、本稿の内容と関連している。

第 7 節「圏論による論理学」で取り扱った分野は圏的論理学 (*categorical logic*) と呼ばれるものである。2020 年現在、圏的論理学の日本語で書かれた教科書は存在しないと言ってよいだろう。あまり多数の圏的論理学の書籍を読んだわけではないので、見落としが多いかもしれないが、英語で書かれた文献をいくつか紹介しておく。

難度 ~ : 筆者が知る限り、圏的論理学について一定量書かれている文献で、最も予備知識がいないものは以下だと思われる。

- Michael Shulman, “Categorical logic: from a categorical point of view”.

ただし、ドラフトがウェブ上にアップロードされているだけで、現時点では完成版ではないようである。線形論理なども視野に入れており、かなり多くのトピックが書かれている。予備知識がいないという理由で難度を低く見積もっているが、完全に読み通すための難度は高いかもしれない。

本稿の執筆の参考にしたものとしては、以下のレクチャーノートがある。

- Steve Awodey, and Andrej Bauer, “Introduction to Categorical Logic”.

これも未成品のようで、2020年3月現在、2020年1月最終更新のドラフトがウェブ上にアップロードされている。難易度としては Awodey 本くらいだと思うが、完成時には、圏論的論理学の基本的入門書になるのではないかと期待している。

難度 ~ : 上で挙げたのは未完成テキストであるが、完成された圏的論理学周辺のテキストもある。定評のある標準的なテキストとしては、以下があると思う。

- J. Lambek, and P. J. Scott, “Introduction to Higher-Order Categorical Logic”, Cambridge University Press, 1988.
- B. Jacobs, “Categorical Logic and Type Theory”, Elsevier Science, 2001.

Lambek-Scott 本は、理論計算機科学や論理学寄りの人にはかなり読みやすいと思う。理論計算機科学・論理学の側からトポスに歩み寄っていくことができる。

難度 ~: 本稿では、トポスに触れる予定だったので、トポスに関して定評のあるテキストと辞書を挙げておく。

- Saunders MacLane, and Ieke Moerdijk, “Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory”, Springer, 1994.
- Peter T. Johnstone, “Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium”, Clarendon Pr, 2003.

ただし、本稿で触れる予定だったトポスは実現可能性トポス (realizability topos) というもので、これに関する文献は以下である。

- Jaap van Oosten, “Realizability: An Introduction to its Categorical Side”, Elsevier 2008.

本稿で身につく程度の予備知識では van Oosten 本を読むのは不可能である。Van Oosten 本は self-contained からは程遠く、他人が理解できるようには書かれていないので、それ以外の人が書

いた学术论文や博士論文を収集した方がよいかもしれない。

本稿のトライポスやトポスに関する未公開ドラフトについては、以下の文献を参考にしている。

- Andrew M.Pitts, “Tripos theory in retrospect”, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Volume 23, Issue 1, 1999, Pages 111-127.

最後に：かつて圏論界の偉人は、Kan 拡張出てこない圏論の本とは認めないと語ったという。この意味で、本稿は「圏論」のテキストではなく、あくまで「圏と論理へのいざない」に過ぎない。「圏論」に関して無料で読める日本語文献のまとまっているサイトとして、最後に以下を紹介しておく。

- alg_d, 壺大整域 http://alg-d.com/math/kan_extension/